

Wahrscheinlichkeitsrechnung und Anwendungen.

Biomathematik. Versicherungsmathematik. Finanzmathematik:

Bonnier, Gert: The χ^2 linkage test. Hereditas (Lund) 28, 230—232 (1942).

Bezeichnen n_1, n_2, n_3, n_4 ($n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = n$) die im F_2 einer Dihybriden-Kreuzung ungekoppelter Gene beobachteten Anzahlen der Phänotypen AB, Ab, aB, ab , so wird allgemein zur Koppelungsprüfung die Größe

$$\chi_L^2 = \frac{1}{9n} (n_1 - 3n_2 - 3n_3 + 9n_4)^2$$

verwendet, die sich ergibt, wenn in der Annahme, daß beide Faktoren $A: a$ und $B: b$ im Verhältnis 3:1 spalten, von dem drei Freiheitsgrade enthaltenden Ausdruck

$$\chi^2 = 16 \left(\frac{n_1^2}{9n} + \frac{n_2^2}{3n} + \frac{n_3^2}{3n} + \frac{n_4^2}{n} \right) - n$$

die der A - bzw. B -Spaltung entsprechenden χ_A^2 , χ_B^2 -Ausdrücke abgezogen werden. χ_L^2 verschwindet nur, wenn A, B nicht gekoppelt sind und gleichzeitig wenigstens einer der beiden Faktoren im Verhältnis 3:1 spaltet. Verf. empfiehlt daher zur Koppelungsprüfung den Ausdruck

$$\chi_L^2 = \frac{8(n_1 + n_4)^2}{5n} + \frac{8(n_2 + n_3)^2}{3n} - n = \frac{(3n_1 - 5n_2 - 5n_3 + 3n_4)^2}{15n},$$

der sich auch im Falle anderer Spaltungsverhältnisse, sinngemäß abgeändert, verwenden läßt.

M. P. Geppert (Bad Nauheim).

Dahlberg, Gunnar: Methodik zur Unterscheidung von Erbliehkeits- und Milieuvariationen mit Hilfe von Zwillingen. Hereditas (Lund) 28, 409—428 (1942).

Kritische Besprechung der bekannten Methoden der Zwillingsforschung zur Trennung des Erbliehkeitseinflusses vom Milieueinfluß bei quantitativen Merkmalen. Bei qualitativen Merkmalen behandelt Verf. die entsprechende Aufgabe unter der vereinfachenden Annahme, daß die EZ eine ebenso große Erbliehkeitsvariabilität aufweisen wie die Bevölkerung für zwei Sonderfälle: 1. manifestiert das Merkmal in den mit den Häufigkeiten p_1, \dots, p_n auftretenden Genotypen P_1, \dots, P_n mit den Häufigkeiten $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, so ist der Unterschied der Merkmalsträgerhäufigkeiten unter den EZ und ZZ

$$D = \sum_i p_i \alpha_i \left(\alpha_i - \sum_k p_k \alpha_k \right)$$

[im Spezialfall $n = 2$, $p_1 = p$, $p_2 = q$ ist $D = pq(\alpha_1 - \alpha_2)^2$]; 2. beruht das Merkmal mit der Häufigkeit p_1 auf Erbfaktoren, mit p_2 auf Umweltfaktoren, so ist derselbe Unterschied

$$D = p_1(1 - p_1)(1 - p_2)^2.$$

Die Formeln werden durch Diagramme verdeutlicht. Ferner werden die im Falle von Familien- bzw. Probandenauslese notwendigen, der Geschwister- bzw. Probandenmethode analogen Korrekturen und die im Falle von altersbedingten Merkmalen angebrachten Alterskorrekturen skizziert. Im Falle angeborener Merkmale läßt sich die Häufigkeit positiv konkordanter ZZ-Paare unter ZZ-Paaren mit mindestens einem Merkmalsträger durch Vergleich mit der entsprechenden theoretischen Häufigkeit zur Bestätigung eines einortigen Erbganges (einfacher Rezessivität bzw. Dominanz) benutzen.

M. P. Geppert (Bad Nauheim).

Cantelli, F. P.: Sulla costruzione delle tavole di mortalità. Atti 3. riun. d. Soc. ital. di Statist. 1941.

Verf. betrachtet zwei Formeln, durch die sich die Sterbewahrscheinlichkeit q_x bzw.

$$\int_x^{x+1} \mu_t dt = -\log(1 - q_x) \text{ in der Form } M_x/(l_x + \delta) \text{ ausdrücken läßt, wo } M_x \text{ und } l_x$$

statistisch bestimmte Zahlen von Gestorbenen und Lebenden darstellen und der Zusatzterm δ nach zweckmäßigen Annahmen geschätzt werden kann; es wird besonders verglichen, wie die Unbestimmtheit dieser Annahmen sich auf die Genauigkeit der einen und der anderen Formel auswirkt. *Bruno de Finetti* (Trieste).

Paglino, F.: Lo sviluppo numerico di una collettività di assicurati. (*Bologna*, 4.—6. IV. 1940.) Atti 2. Congr. Un. Mat. Ital. 687—690 (1942).

Für den Betrag des Bestandes $p(t)$ besteht die bekannte Beziehung

$$p(t) = p(a) + \int_a^t p(s)[n(s) - m(s)]ds,$$

$[n(s)$ Betrag der Neubetritte, $m(s)$ Betrag der Austritte], aus der man herleitet: $[\ln p(t)]' = n(t) - m(t)$. Da sich aus dem untersuchten italienischen Material (1925 bis 1934) mittels der Methode der kleinsten Quadrate recht brauchbar die Funktionen: $\bar{n}(t) = 0,48184 - 0,03547 \bar{p}(t)$, $\bar{m}(t) = 0,05237 - 0,01282 \bar{p}(t)$ ergeben, erhält man durch Integration der obigen Differentialgleichung

$$[\bar{p}(0) - (8,89355 - \bar{p}(0))e^{-0,42947t}] \bar{p}(t) = 8,89355 \bar{p}(0).$$

F. Knoll (Wien).

Giaccardi, F.: Di alcune considerazioni sull'ammortamento vitalizio. Giorn. Mat. Finanz., II, s. 11, 56—67 (1942).

Es wird für die Tilgungsquote eine Zerlegung angegeben, die man eigentlich so erklären kann: Zinsen und Risikoprämie werden stets für die ganze anfängliche Schuld vergütet; der Überschuß dient als (im allgemeinen veränderliche) Prämie für eine Lebensfallversicherung (Rückerstattung der Schuld bei Fälligkeit).

Bruno de Finetti (Trieste).

Invrea, Raffaele: Il rischio medio di un'operazione assicurativa e l'applicazione di un teorema del Cantelli. Giorn. Ist. Ital. Attuari 12, 167—190 (1941).

Die Cantellische Verallgemeinerung der Hattendorffschen Formel gibt folgenden expliziten Ausdruck:

$$M^2 = \sum_i v^{t(i+1)} \sum_r p_{tr} \left\{ \sum_i q_{tri} (1 - q_{tri}) \cdot {}_{i+1-0}V_{ri}^2 - 2 \sum_{ij} q_{tri} q_{trj} \cdot {}_{i+1-0}V_{ri} \cdot {}_{i+1-0}V_{rj} \right\},$$

der im allgemeinsten Falle beliebig vieler Zustände gilt, wenn $p_{tr} = W$. (Wahrscheinlichkeit) des Zustandes (r) nach t Jahren; $q_{tri} = W$. des Z. (i) nach $t+1$ Jahren unter Annahme des Z. (r) nach t Jahren; ${}_{i+1-0}V_{ri}$ = diesbez. Prämienreserve samt eventuellen Kapitalzahlungen am Zeitpunkte $t+1$. — Zahlreiche Beispiele erweisen die Formel als recht brauchbar; manchmal ist die Anwendung erleichtert, wenn man eine Versicherung in 2 (oder mehr) andere zerlegt und $M^2 = M_1^2 + M_2^2 + 2M_{12}$ berechnet (wo für M_{12} ein analoger Ausdruck wie für M^2 gilt). *Bruno de Finetti*.

Amoroso, Ernesto: Osservazioni sullo sviluppo del portafoglio di una compagnia di assicurazioni. (*Bologna*, 4.—6. IV. 1940.) Atti 2. Congr. Un. Mat. Ital. 683—686 (1942).

Bedeutet Pdt die eingehobene Prämie, Tdt den Bilanznutzen im Zeitintervall dt , setzt man $y = P'/P$, so kann man unter sehr allgemeinen Voraussetzungen den Ansatz $T = P(a + by + cy^2)$ machen; ist Q das Geschäftsergebnis und nimmt man den Sterblichkeitskoeffizienten des Bestandes mit 0,1 an, so daß daher $Q = P' + 0,1P$ ist, so hätte man z. B. bei Berücksichtigung üblicher Betriebskonstanten $T = \{0,04 - 0,75y - 0,5y^2\}P$. Soll das Integral $J = \int_{t_0}^{t_1} Te^{-jt} dt$ einen maxi-

malen Wert annehmen für beliebig gewählte t_0, t_1 und für alle Funktionen P , welche an den Stellen t_0 und t_1 die gleichen Werte haben, dann muß y der Differentialgleichung $a + bj + 2cyj - cy^2 - 2cy' = 0$ genügen, die sich durch die Substitution $x = y - j$ in die Form $x^2 + 2x' + s = 0$, $sc = -(a + bj + cj^2)$ bringen läßt. Nach

einfacher Integration gelangt man zu den beiden möglichen Formeln für P

$$P = P_0 e^{st} \left\{ \frac{\cos(h + kt)}{\cos h} \right\}^2 \quad \text{oder} \quad P = P_0 e^{st} \left\{ \frac{\operatorname{ch}(h + kt)}{\operatorname{ch} h} \right\}^2$$

(h willkürliche Konstante), je nachdem, ob $s = -4k^2$ oder $= 4k^2$ ist. *F. Knoll.*

Cantelli, F. P., F. Insolera e C. E. Bonferroni: Sui fondamenti della matematica finanziaria. Giorn. Mat. Finanz., II. s. 11, 1—8, 9—23, 29—43 e 44—55 (1942).

In diesem Briefwechsel werden Meinungsverschiedenheiten betreffend die Grundbegriffe der Theorie des Zinsfußes und der Kapitalisierung einander gegenübergestellt.

Bruno de Finetti (Trieste).

Sibirani, Filippo: Sugli ammortamenti continui. (Bologna, 4.—6. IV. 1940.) Atti 2. Congr. Un. Mat. Ital. 699 (1942).

Inhaltsangabe der in dies. Zbl. 26, 143 besprochenen Arbeit. *Harald Geppert.*

Hibbert, Lucien: Les équations du problème des fluctuations économiques et de l'interdépendance des marchés, d'après M. B. Chait. Bull. Soc. Math. France 69, 1—22 (1941).

Il flusso d'entrata, d'uscita e di consumo in un gruppo di mercati in rapporti di scambio tra loro si suppone obbediscano a un sistema di equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti; tali costanti hanno un significato statistico che ne consente la valutazione numerica. Si hanno precisamente: equazioni esprimenti le „leggi del consumo“ (di secondo o primo grado a seconda che il mercato è „finale“ (con consumo proprio) o intermediario), ed equazioni del „beneficio motore“. *Bruno de Finetti.*

Hitchcock, Frank L.: The distribution of a product from several sources to numerous localities. J. Math. Physics, Massachusetts Inst. Technol. 20, 224—230 (1941).

Verf. behandelt das Problem des Kostenminimums bei der Warenversendung. Er betrachtet m Versandbetriebe und n Bezugsorte und gibt die Kosten vor, die bei Versendung der Wareneinheit von den einzelnen Versandbetrieben nach den verschiedenen Bezugsorten entstehen. Mittels zweier Gleichungssysteme für den Totalversand der einzelnen Versandbetriebe und für den Totalverbrauch der verschiedenen Bezugsorte berechnet er stufenweise das Minimum der Versandkosten. *F. Burkhardt.*

Geometrie.

Grundlagen. Nichteuclidische Geometrie:

Hjelmslev, Johannes: Einleitung in die allgemeine Kongruenzlehre. 3. Mitt. Danske Vid. Selsk., Math.-fys. Medd. 19, Nr 12, 1—50 (1942).

Seiner Begründung der absoluten Geometrie und der Herleitung einiger zentraler Sätze der Elementargeometrie legte Verf. in den ersten beiden Mitteilungen [Danske Vid. Selsk., Math.-fys. Medd. 8, Nr 11, u. 10, Nr 1 (1929)] eine für das Rechnen mit Punkt- und Geradenspiegelungen geeignete Axiomenbasis zugrunde, die nunmehr zunächst in § 2 durch Ausfüllung einer Lücke ergänzt wird. Die Eigenart dieser axiomatischen Basis gestattet, die Forderung einer eindeutigen Verbindung zweier Punkte von den übrigen Axiomen abzusondern; dadurch wird es möglich, die vom Verf. verschiedentlich (so z. B. in Hamburg. math. Einzelschr. 1923, H. 1) propagierte Geometrie, in der zwei Punkte unter Umständen viele Verbindungsgeraden haben, genauer (gemäß dem im Schlußwort der 1. Mitteilung aufgestellten Programm) zu untersuchen. Die Elemente einer solchen Geometrie teilen sich in Nachbarpunktklassen, die ihrerseits als Elemente einer zugehörigen „Großgeometrie“ dienen, in der die gleichen Axiome gelten und zwei Elemente stets eindeutig verbindbar sind. Die Einteilung in Nachbarpunktklassen läßt sich iterieren. Offenbar in Abweichung von der ursprünglichen Rechtfertigung der „natürlichen Geometrie“ sind die Untersuchungen größtenteils denjenigen Geometrien gewidmet, die innerhalb der einzelnen Nachbarpunktklassen gelten; diese sind immer „fast euklidisch“. Als abschließendes

Beispiel wird die ebene Koordinatengeometrie aus den Koordinaten $\sum_{i=0}^n a_i t^i$ — mit reellen a_i und mit $t^{n+1} = 0$ — (deren einfachster Fall $n = 1$ vom Verf. verschiedentlich in diesen Zusammenhang gestellt wurde) kurz betrachtet. *Arnold Schmidt.*

Cassina, Ugo: Riduzione delle ipotesi nel teorema fondamentale della geometria proiettiva. (*Bologna*, 4.—6. IV. 1940.) Atti 2. Congr. Un. Mat. Ital. 281—282 (1942).

Inhaltsangabe der in dies. Zbl. 23, 154; 24, 62 besprochenen Arbeiten.

Harald Geppert (Berlin).

Elementargeometrie:

Ghermanescu, M.: Sur une construction géométrique. Bull. Sci. École polytechn. Timişoara 10, 253—257 (1941).

Verf. gibt mehrere Lösungen (von ihm selbst und von anderen) der bekannten Konstruktionsaufgabe: Einem Dreieck ABC ein anderes Dreieck MNP einzuschreiben, das einem gegebenen Dreieck $M_1N_1P_1$ direkt ähnlich ist, und dessen Ecke M auf der Seite BC liegt. *Max Zacharias* (Berlin).

Ionescu, D. V.: Verallgemeinerungen einiger Sätze von Pappus. Gaz. mat. 47, 201—204 u. 252—256 (1942) [Rumänisch].

Setzt man $k' = \frac{\mu - \nu + k(\mu - \nu + \lambda)}{\nu + k(\nu - \lambda)}$ und $k'' = \frac{\nu - \lambda + k'(\nu - \lambda + \mu)}{\lambda + k'(\lambda - \mu)}$ (λ, μ, ν Konstanten; k, k', k'' Variablen), so folgt $k = \frac{\lambda - \mu + k''(\lambda - \mu + \nu)}{\mu + k''(\mu - \nu)}$. Wählt man auf den Seiten BC, CA, AB eines Dreiecks ABC die Punkte M, N, P derart, daß $MB:MC = -k, NC:NA = -k', PA:PB = -k''$, so fällt der Schwerpunkt der Massen λ, μ, ν in den Punkten M, N, P mit dem Schwerpunkt der gleichen Massen in den Punkten A, B, C zusammen. Teilen die Punkte A', B', C' die Strecken BC, CA, AB und die Punkte M', N', P' die Strecken NP, PM, MN in den Verhältnissen $-\nu:\mu, -\lambda:\nu, -\mu:\lambda$, so sind die Geradenpaare AM und $A'M', BN$ und $B'N', CP$ und $C'P'$ parallel. Für $\lambda = \mu = \nu$ ergeben sich als Sonderfälle bekannte Sätze von Pappos. Durchläuft M die Gerade BC , so durchläuft M' eine Parallele zu BC , und PN umhüllt eine Parabel, deren Lagebeziehungen vom Verf. untersucht werden. Schließlich beschäftigt sich Verf. mit dem Verhältnis der Flächeninhalte der Dreiecke ABC und MNP ; er bestimmt insbesondere das kleinste Dreieck $M_0N_0P_0$. *Max Zacharias* (Berlin).

Vasilu, I. C.: Über die Grenze eines Dreiecks. Gaz. mat. 47, 355—356 (1942) [Rumänisch].

Es sei M ein beliebiger Punkt in der Ebene eines Dreiecks $A_0B_0C_0$ und $A_nB_nC_n$ das Dreieck, dessen Ecken dem Punkt M bezüglich des Dreiecks $A_{n-1}B_{n-1}C_{n-1}$ harmonisch zugeordnet sind. Gh. Buicliu hat [Gaz. mat. 41, 32—35 (1935)] durch rein geometrische Betrachtungen bewiesen, daß für $n \rightarrow \infty$ das Dreieck $A_nB_nC_n$ in die trilineare Polare von M bezüglich $A_0B_0C_0$ entartet. Verf. bestätigt das Ergebnis von Buicliu rechnerisch. *Max Zacharias* (Berlin).

Abramescu, N.: Über Kurven, die aus Eigenschaften der Dreiecke entspringen, in denen $B = 2A$ ist. Gaz. mat. 47, 441—443 u. franz. Zusammenfassung 441 (1942) [Rumänisch].

Liegen A und die Richtung von AC fest, so ist der Ort von B bei konstanter Summe $a + b$ eine Pascalsche Schnecke. Liegt $AC = b$ fest, so beschreibt B eine unikursale zirkuläre Kubik, eine Strophoide. *Max Zacharias* (Berlin).

Gaiu, N. Gh.: Über die Dreiecke ABC , in denen $B = 2A$ ist. Gaz. mat. 47, 443—445 (1942) [Rumänisch].

Verf. beweist zunächst die bekannte Beziehung $b^2 = a(a + c)$ zwischen den Seiten eines solchen Dreiecks und entwickelt sodann die Gleichungen der in vorsteh. besprochenen Note rein geometrisch hergeleiteten beiden Kurven. *Max Zacharias.*

Anghelujă, Th.: Une identité entre nombres complexes et un théorème de géométrie élémentaire. Bull. Sci. École polytechn. Timişoara 10, 249—252 (1941).

On considère dans un plan un polygone régulier $A_1A_2 \dots A_n$ et un point quelconque I ; avec les longueurs IA_1, IA_2, \dots, IA_n on peut former une ligne polygonale fermée. (Pour $n = 3$ et $n = 4$ Pompeiu, ce Zbl. 14, 272; 25, 352). Démonstration en utilisant les nombres complexes. Démonstration d'un théorème de Angelesco [Bull. Math. Phys. École polytechn. Bucarest 9, 7 (1937)]. Étant donné un triangle, on peut toujours trouver un triangle équilatéral ABC dans le plan duquel il existe un point I , tel que les distances IA, IB, IC soient égales aux cotés du triangle donné. La généralisation pour $n > 3$ n'est pas vraie.

O. Bottema (Delft, Niederlande).

Gribnau, H. A.: Über einige merkwürdige Punkte und Linien des Kreisvierecks. Nieuw Arch. Wiskde 21, 65—72 (1941).

Nach C. A. Bretschneider [Arch. Math. Phys. (1) 3, 90 (1843)] schneiden sich im Sehnenviereck die sechs Lote aus den Seitenmittelpunkten auf die Gegenseiten in einem Punkte H , der mit dem Umkreismittelpunkt O und dem Eckenschwerpunkt S in einer Geraden liegt, und zwar liegt S in der Mitte von HO . Nach E. Lemoine [Nouvelles Ann. Math. (2) 8, 47 (1869)] gehen durch denselben Punkt H die Wallace-Simonschen Geraden der vier Ecken bzw. der gegenüberliegenden Dreiecke. Diese (vom Verf. irrtümlich S. Nager zugeschriebene) Sätze werden elementargeometrisch sowie mit der Grassmannschen Methodik bewiesen.

E. Egerváry (Budapest).

Bilger, Gérard: Remarques sur les polygones et leurs étoilés. Enseignement Math. 38, 325—329 (1942).

C sei ein ebenes reguläres oder halbreulär gleichwinkliges Polygon mit Umfang L und Inhalt F , C' ein dazugehöriges Sternpolygon mit den gleichen Ecken und Winkelhalbierenden, Umfang L' , Inhalt F' . Legt man von einem außerhalb C gelegenen Punkt O aus eine beliebige Schleife um eine oder mehrere Ecken von C und sind d_i, d'_i die Abstände der getroffenen Seiten von C, C' von O , positiv im örtlichen Überkreuzungssinn der Schleife genommen, so gilt $\sum \pm d_i/L = \sum \pm d'_i/L', \sum \pm d_i^2/F = \sum \pm d'^2_i/F'$, wie Verf. ohne Beweis angibt. Hieraus werden Folgerungen gezogen. Eine entsprechende Formel gilt für das reguläre Ikosaeder C und das reguläre Dodekaeder 3. Art C' mit denselben Kanten, wenn L durch Oberfläche, F durch Inhalt, d_i durch die Abstände von den Seitenflächen interpretiert werden.

Harald Geppert (Berlin).

Baron, H. J.: Die Ankugeln des Tetraeders in Beziehung zur Umkugel. Tôhoku Math. J. 48, 185—192 (1941).

Im Dreieck ist der kleinste Ankreisradius $\leq \frac{3}{8}r$, der mittlere $< 2r$, der größte $< 4r$ und $\geq \frac{3}{8}r$ (r Umkreisradius). Die Mitten der Ankreise liegen außerhalb des Umkreises in Kreisringen zwischen r und $2r$, r und $r\sqrt{5}$, $2r$ und $3r$ in wachsenden Abständen von seiner Mitte. Verf. untersucht die entsprechenden Beziehungen zwischen den Ankugeln und der Umkugel eines Vierflachs. Es gibt zwei Arten von Ankugeln: 1) Drei Ankugeln, die zwei Ebenen von außen berühren. Für diese gibt es weder untere noch obere Grenzen. Ihre Mitten liegen außerhalb der Umkugel. 2) Vier Ankugeln, die nur eine Ebene von außen berühren. Diese haben bei fester Umkugel keine unteren Grenzen. Doch ist der kleinste Radius $\leq \frac{3}{8}r$, der zweite $\leq r\sqrt{2\sqrt{3}-3} = 0,68125r$, der dritte $\leq \frac{4}{3}r\sqrt{3} = 0,7698r$. Von dem vierten vermutet Verf., daß er stets $< r$ sei, was er aber nur in einzelnen Fällen beweisen kann. Die Mitten können auf der Umkugel und beliebig in ihr liegen, nur nicht in ihrer Mitte. Der größte Mittenabstand liegt sicher unter $2r$. In allen Pyramiden, deren Seitenflächen gegen die Grundfläche gleich geneigt sind, ist der Radius der Grundflächenankugel $\leq \frac{3}{8}r\sqrt{3} = 1,1547r$. Ob dies allgemein gilt, und ob es für die einzelnen Ankugelmitten obere und untere Grenzen gibt, kann Verf. nicht allgemein entscheiden; er bringt nur ein Beispiel.

Max Zacharias (Berlin).

Alaci, V.: Nouveaux domaines de recherches en „Trigonométrie quadratique“. Bull. sci. École polytechn. Timișoara 9, 197—234 (1940); 10, 3—42 u. 205—248 (1941).

L'aut. a donné [Rev. mat. Timișoara 18, 109—116, 121—133, 138—146 (1938/39); 19, 3—13, 17—24, 29—37, 41—49, 57—72 (1939); cfr. aussi ce Zbl. 20, 352] une définition du sinus quadratique ($sp\alpha$) et du cosinus quadratique ($cp\alpha$) d'un angle en remplaçant le cercle unité par un carré avec la semidiagonale 1. On a par exemple

$$sp\alpha = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{1 + \operatorname{tg}\alpha} \left(0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2} \right), \quad cp\alpha = \frac{-\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}\alpha} \left(\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \pi \right)$$

etc. Ici il poursuit ses recherches en donnant des applications. Courbes représentées paramétriquement par les fonctions trigonométriques. Transformations de coordonnées.

O. Bottema (Delft, Hollande).

Analytische Geometrie. Projektive Geometrie:

Kommerell, Karl: Die Pascalsche Konfiguration 9₃. Deutsche Math. 6, 16—32 (1941).

La configurazione qui considerata è quella costituita da tre punti A_0, B_0, C_0 d'una retta γ_0 , da tre punti A_2, B_2, C_2 d'una retta γ_1 , e dai tre punti $A_1 \equiv B_0 C_2 \cdot B_2 C_0$, $B_1 \equiv A_0 C_2 \cdot A_2 C_0$, $C_1 \equiv A_0 B_2 \cdot A_2 B_0$ i quali stanno pure su una retta γ_2 . Essa consta di 9 punti e di 9 rette tali che per ciascuno dei 9 punti passano tre delle 9 rette, e che su ciascuna delle 9 rette stanno tre dei 9 punti; la si suole indicare col simbolo 9₃. Le altre 6 rette della configurazione sono: $\alpha_0 \equiv A_2 B_1 C_0$, $\alpha_1 \equiv A_1 B_0 C_2$, $\alpha_2 \equiv A_0 B_2 C_1$; $\beta_0 \equiv A_1 B_2 C_0$, $\beta_1 \equiv A_0 B_1 C_2$, $\beta_2 \equiv A_2 B_0 C_1$. La notazione è scelta in modo che i punti A_i, B_i, C_i sono allineati sempre e solo quando $i + k + l$ è multiplo di 3. Vi sono 108 sostituzioni che operano separatamente sui 9 punti e sulle 9 rette in modo da mutare un punto ed una retta che si appartengono in un punto ed una retta che pure si appartengono; ve ne sono poi altre 108 che operano analogamente, ma scambiando i punti con le rette, e che son dette reciprocità; tutte insieme formano un gruppo misto G_{216} di cui qui si studiano diffusamente le proprietà. Eccone alcune. Tra le 108 reciprocità ve ne sono 18 involutorie, e non di più, distribuite in 6 terne; le reciprocità di ciascuna terna, moltiplicate tra loro a coppie, danno luogo sempre ad un medesimo gruppo ciclico di 3° ordine 1, K, K^2 , ove K è una delle 108 sostituzioni del 1° tipo, e precisamente $(A_0 A_1 A_2 \ B_0 B_1 B_2 \ C_0 C_1 C_2)$; le tre sostituzioni 1, K, K^2 sono contenute in tre omografie piane costituenti esse pure un gruppo ciclico di 3° ordine; invece nessuna delle 18 reciprocità involutorie è contenuta in una polarità piana. Una delle sei terne di reciprocità involutorie è ad es. la seguente:

$$\left(\begin{smallmatrix} \alpha_0 \alpha_1 \alpha_2 & \beta_0 \beta_1 \beta_2 & \gamma_0 \gamma_1 \gamma_2 \\ A_1 A_2 A_0 & B_1 B_2 B_0 & C_1 C_2 C_0 \end{smallmatrix} \right), \quad \left(\begin{smallmatrix} \alpha_0 \alpha_1 \alpha_2 & \beta_0 \beta_1 \beta_2 & \gamma_0 \gamma_1 \gamma_2 \\ A_2 A_0 A_1 & B_2 B_0 B_1 & C_2 C_0 C_1 \end{smallmatrix} \right), \quad \left(\begin{smallmatrix} \alpha_0 \alpha_1 \alpha_2 & \beta_0 \beta_1 \beta_2 & \gamma_0 \gamma_1 \gamma_2 \\ A_0 A_1 A_2 & B_0 B_1 B_2 & C_0 C_1 C_2 \end{smallmatrix} \right);$$

queste, insieme con 1, K, K^2 , formano un sottogruppo di G_{216} ; si hanno 6 di tali sottogruppi. Le 108 sostituzioni del 1° tipo formano entro G_{216} un sottogruppo invariante transitivo G_{108} ; tra esse ve ne sono 18 che mutano in sé ciascuna delle terne $A_0 A_1 A_2$, $B_0 B_1 B_2$, $C_0 C_1 C_2$, e che formano entro G_{108} un sottogruppo invariante; ecc. I triangoli $A_0 A_1 A_2$, $B_0 B_1 B_2$ son tre volte prospettivi rispetto a C_0, C_1, C_2 come centri; mediante un omografia si può far sì che $A_0 A_1 A_2$, $B_0 B_1 B_2$, $C_0 C_1 C_2$ divengano tre triangoli equilateri concentrici; 1, K, K^2 sono allora le tre rotazioni di $0, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$ intorno al loro centro comune. Resta da decidere se qualcuna della 108 reciprocità o qualcuna delle 108 sostituzioni del 1° tipo diverse da 1, K, K^2 siano contenute in reciprocità od omografie piane.

E. G. Togliatti (Genova).

Kommerell, Karl: Die automorphen Kollineationen einer Kurve zweiter Ordnung. Jber. Dtsch. Math.-Verein. 52, Abt. 2, 4—28 (1942).

Une surface Σ de courbure totale constante ($-a^2$ ou $+a^2$) admet un groupe G

de ∞^3 auto-applications; on peut représenter Σ sur un plan Π de sorte qu'aux géodésiques de Σ correspondent les droites de Π , et qu'à chaque auto-application de Σ corresponde une certaine transformation homographique de Π en lui-même. Le groupe H d'homographies de Π ainsi découvert est celui qui conserve une certaine conique σ d'équation réelle; pour la courbure $(-a^2)$, σ est réelle, cas dit hyperbolique; pour $(+a^2)$, σ est imaginaire, cas elliptique. On peut remplacer Π par un autre plan Π_1 lui correspondant homographiquement, donc σ pourra être $x^2 + y^2 \pm 1 = 0$. La géométrie non euclidienne du plan revient à étudier Π , plus ou moins indépendamment de Σ , et à attribuer à chaque élément de Π (distance, angle...) non pas sa mesure euclidienne, mais la mesure de l'élément homologue sur Σ . C'est ce que l'au. fait dans le travail analysé. — Bien que plus compliqué dans l'espace, le cas hyperbolique se présente plus simplement dans Π . L'au. introduit, comme élément simple de H , ce qu'il appelle „Polarspiegelung“ et que je traduirai (assez librement), Homologie automorphe (en abrégé H. a.), c'est-à-dire l'homologie involutive qui a pour pôle S un point arbitraire de Π et pour axe s la polaire de S par rapport à σ . Par un enchaînement de propositions simples, l'au. montre que toute opération de H se ramène soit à une H. a., soit à la composition de deux H. a.; je citerai comme particulièrement intéressante la méthode suivie pour ramener la composition de trois H. a. successives à deux H. a. L'égalité $2 + 2 = 3 + 1$ prouve, puisqu'une H. a. dépend de deux paramètres, que la décomposition en deux H. a. d'une opération de H (non réductible à une seule H. a.) est possible de ∞^1 manières: les pôles de toutes ces composantes sont alignés, et leurs polaires concourantes. — Dans le cas elliptique, σ devenant imaginaire, on se demande a priori comment démontrer — par voie élémentaire et réelle — les résultats précédents, qui subsistent sans changement notable. L'au. (sans toutefois expliquer le secret de son artifice) y arrive d'une façon particulièrement élégante, en remarquant qu'une H. a. ne dépend que de son pôle et son axe, et non de la conique σ pour laquelle S et s sont pôle et polaire; or, si nous considérons toutes les coniques du faisceau à la fois ponctuel et tangentiel $\sigma + \lambda s^2 = 0$, où σ est la conique déjà étudiée et s une droite du plan Π , λ un paramètre arbitraire, toutes les H. a. relatives à ces diverses coniques, dont le pôle est, ou bien le pôle de s vis à vis de σ , ou bien un point quelconque de s , ne dépendent pas de λ et c'est ce qui permet de ramener l'étude à faire pour une conique particulière $\sigma + \lambda_0 s^2 = 0$ imaginaire à l'étude déjà faite pour une conique $\sigma + \lambda_1 s^2 = 0$ réelle. — L'au. insiste bien sur le fait que le cas elliptique est, en réalité, le plus simple: je vais me permettre de donner ici, de ce fait, quelques raisons complémentaires qui se rattachent à des travaux que j'ai publiés sur l'application de deux surfaces. Si σ est imaginaire, il existe effectivement une surface Σ , à savoir la sphère, qui donne dans l'espace à 3 dimensions un homologue effectif de tout point (à distance finie ou infinie) de Π , et même deux, diamétralement opposés: une H. a. de Π correspond sur Σ , ad libitum, à une symétrie autour d'un diamètre, ou à une symétrie par rapport à un plan diamétral. Si σ est réelle, un point de Π n'a d'homologue sur une surface Σ que s'il est à l'intérieur de σ , et d'ailleurs on ne connaît aucune surface Σ qui remplisse complètement l'intérieur de σ ; à une H. a. de Π correspond sur Σ , si S est intérieur à σ , une transformation par auto-application analogue à une symétrie de la sphère relativement à un diamètre (et il y a lieu d'examiner si S est intérieur à la fraction de Π représentée sur Σ); si S est extérieur à σ , sa polaire s traverse σ et la transformation est analogue à une symétrie de la sphère par rapport à un plan diamétral. Si la surface Σ est analytique et si l'on introduit les points imaginaires de Σ , les résultats deviennent bien plus clairs. — Ensuite si σ est réelle, le sens de parcours sur σ est changé ou non par une H. a. suivant que S est extérieur ou non à σ ; si donc on considère deux successions équivalentes de H. a., la parité du nombre des pôles S extérieurs à σ est la même de part et d'autre; cette remarque n'intervient pas dans le cas de σ imaginaire.

B. Gambier (Paris).

Kirsten, Waldemar: Verallgemeinerungen der Geraden-Kugel-Transformation in der Punktreihegeometrie. Dtsch. Math. 6, 409—433 (1942).

Neben die klassische Herleitung von Lies euklidischer Geraden-Kugel-Transformation mittels Projektion der M_3^2 des R_4 , welche von F. Klein stammt, hat E. A. Weiss in seinen Untersuchungen zur Punktreihegeometrie [Dtsch. Math. 2, 285 bis 293 (1937); Punktreihegeometrie (1939) § 10; dies. Zbl. 16, 368; 21, 348] eine prinzipiell neue Ableitung dieser Transformation gestellt, die sich der Projektion einer Segreschen M_4^4 des R_7 aus einem R_3 bedient, welcher die M_4^4 nach einer C_3 schneidet, die mit allen erzeugenden R_3 von M_4^4 einen Punkt gemein hat. Tritt dabei an die Stelle des Projektions- R_3 ein solcher, der die M_4^4 nach einem Kegelschnitte und einer Treffgeraden schneidet, so entsteht als Ausartung die Eulersche Transformation, die man nach Ref. [Jber. Dtsch. Math.-Vereinig. 48, Abt. 1, 236—257 (1939); dies. Zbl. 20, 66] als die Geraden-Kugel-Transformation eines isotropen Raumes auffassen kann, dessen absolutes Gebilde nämlich in ein schneidendes Geradenpaar zerfallen ist. — Gegenstand der vorliegenden Untersuchungen ist die mehrdimensionale Verallgemeinerung der Weisschen Konstruktion der euklidischen Geraden-Kugel-Transformation und ihrer Ausartungen. Dazu werden zunächst im Anschlusse an E. A. Weiss die Punktreihen (= bezifferten, d. h. mit einer binären Parameterdarstellung versehenen Geraden bzw. im singulären Falle die mit einem binären Parameter μ bezifferten Punkte m) eines projektiven r_n auf die Punkte eines R_{2n+1} abgebildet, wobei den singulären Punktreihen die Punkte einer Segreschen M_{n+1}^{n+1} entsprechen. Zeichnet man in r_n eine rationale Normalkurve C_{n-1} als absolute Kurve (A. K.) aus und bezeichnet man deren Trägerraum r_{n-1} als den eigentlichen r_{n-1} , versteht man ferner die A. K. mit einer binären Parameterdarstellung μ , d. h. beziffert man sie, so kann man jeder singulären Punktreihe (m, μ) des r_n jenes Minimallinienelement zuordnen, das deren Punkt m mit dem Punkte μ der A. K. verbindet. Die singulären Punktreihen der A. K. sind im R_{2n+1} auf eine rationale Normalkurve C_n der Segreschen M_{n+1}^{n+1} abgebildet, welche einen Raum R_n^0 aufspannt. Wird jetzt M_{n+1}^{n+1} von diesem R_n^0 aus auf einen Bildraum R_n projiziert, so erhält man als Bilder ihrer ∞^n erzeugenden Geraden wieder ∞^n gerade Linien des Bildraumes R_n , welche einen Grundkomplex bilden. Insbesondere entsteht so eine eindeutig umkehrbare Abbildung der eigentlichen Minimallinienelemente des Grundraumes r_n auf die eigentlichen Linienelemente dieses Grundkomplexes im Bildraume R_n , wobei den rationalen Regelflächen $(n-1)$ -ter Ordnung durch die A. K. in r_n (= „verallgemeinerten Kugeln“) eindeutig umkehrbar die Geraden des R_n entsprechen. Insgesamt ist damit wirklich eine mehrdimensionale Verallgemeinerung der euklidischen Geraden-Kugel-Transformation gewonnen, deren Ausartungen sich wieder dadurch ergeben, daß die A. K. C_{n-1} auf verschiedene Arten in rationale Teile zerfällt, deren jeweils einer beziffert wird. — Die Note behandelt nach diesen allgemeinen Erwägungen vor allem den Fall $n=4$, wo es sich also um die (ausführlicher entwickelten) Zusammenhänge zwischen der Geometrie der Punktreihen eines r_4 und der Geometrie eines R_9 mit ausgezeichneteter Segrescher M_5^5 handelt, wo ferner die A. K. eine rationale normale C_3 ist und die Minimalinienelemente des Grundraumes r_4 auf die Linienelemente eines linearen Tetrakomplexes (= Schnitt zweier linearer Pentakomplexe des R_4) übertragen werden. In dieser nach S. Lies Ausdrucksweise „polaren“ Beziehung des Sekantenkomplexes von C_3 und des linearen Tetrakomplexes besteht die vierdimensionale Verallgemeinerung der euklidischen Geraden-Kugel-Transformation, wobei als „Kugeln“ allerdings wieder die rationalen kubischen Regelflächen durch die A. K. C_3 aufzufassen sind. Diese Verallgemeinerung ist schon von H. Liebmann [S.-B. Bayer. Akad. Wiss. 1915, 189—198] auf anderem Wege gefunden worden. — Ihre möglichen Ausartungen, d. h. vierdimensionalen Verallgemeinerungen der Eulerschen Transformation, erhält man, wenn die A. K. C_3 zerfällt, was entweder eine Gerade und einen Kegelschnitt, oder drei zusammenhängende Geraden ergibt, wobei noch einer der rationalen Teile

beziffert werden muß und die Rolle des absoluten Gebildes übernimmt. Von Interesse ist dabei vielleicht besonders der Fall, wo der Kegelschnitt beziffert wird. Dann gibt es nämlich im Grund- und Bildraum je ein Büschel von Teilräumen (r_3) bzw. (R_3), in deren entsprechenden Paaren r_3 und R_3 die euklidische Geraden-Kugel-Transformation auftritt. — Die Herleitung der Gleichungen für diese einzelnen Übertragungen der Geraden-Kugel-Transformationen auf den R_4 ist angefügt.

K. Strubecker (Straßburg).

Weitzenböck, R.: Die Kovarianten von vier Ebenen im R_5 . Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. 45, 139—141 (1942).

Per mezzo del calcolo simbolico, l'A. determina quei covarianti di quattro piani generici di S_5 che contengono come sole variabili le coordinate x di punto. Se ne trovano otto, tutti di 3° grado nelle x , e per mezzo dei quali si posson esprimere tutti gli altri; essi sono legati tra loro da tre relazioni algebriche di 2° grado. Dualmente si posson trovare le formazioni controvarianti che contengono come sole variabili le coordinate u' d'un iperpiano. Se ne trae che tre piani di S_5 non posseggono alcun invariante contenente come uniche variabili le coordinate d'un punto, nè alcun controvariante contenente solo le coordinate di un iperpiano variabile. E. G. Togliatti.

Weitzenböck, R.: Über die M_3^2 dreier Ebenen im R_5 . Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. 45, 215—216 (1942).

Valendosi del calcolo simbolico, l'A. determina alcuni covarianti di tre piani generici di S_5 che, uguagliati a zero, posson fornire una rappresentazione analitica della V_3^3 definita dai tre piani e che è ricoperta dalle ∞^2 rette ad essi incidenti. Uno di questi covarianti è di 4° grado nelle coordinate π_{ijk} di piano, ed uguagliato a zero rappresenta l'insieme dei piani che tagliano la detta V_3^3 in tre punti due dei quali coincidono. Un altro è di 3° grado in coordinate π_{ij} di retta, ed uguagliato a zero rappresenta il complesso cubico delle rette che si appoggiano a V_3^3 ; dualmente si può avere l'equazione di V_3^3 in coordinate d'iperpiano. E. G. Togliatti (Genova).

Algebraische Geometrie:

Gauthier, Luc: Au sujet d'un théorème de M. Apéry sur les quintiques. C. R. Acad. Sci., Paris 214, 408—410 (1942).

Die Note bezieht sich auf die in dies. Zbl. 26, 66 besprochene Arbeit von Apéry. Die ebene C^5 mit Spitzen in den 5 Punkten $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$, $(1, 1, 1)$, (a, b, c) hat die Gleichung: $PC^2 + 2QC(Q^2 - PR) + R(Q^2 - PR)^2 = 0$ mit

$$C = \Sigma a(b - c)yz, \quad P = \Sigma \lambda^2 bc(b - c)x, \quad Q = \Sigma \lambda bc(b - c)x, \quad R = \Sigma bc(b - c)x, \\ \lambda = bc - b^2 - c^2, \quad \mu = ca - c^2 - a^2, \quad \nu = ab - a^2 - b^2.$$

Sie ist autopolar zur C^2 mit der Gleichung: $pq \Sigma A \lambda^2 x^2 + 2 \Sigma a(b - c)^5 \mu^2 \nu^2 yz = 0$ mit $p = abc$, $q = (a - b)(b - c)(c - a)$, $A = 4a(b + c)(a - b)(a - c) - 3(a^2 - bc)^2$, ... Verf. interessiert sich besonders für den Fall, daß diese C^2 zerfällt; dann muß (a, b, c) auf einer Kurve 42. Ordnung liegen; diese besteht aus den 6 Verbindungsgeraden der übrigen Spitzen (zerfallende C^6) und einer dreifach gezählten Kurve 12. Ordnung, die zum Ausdruck bringt, daß man von einer der Spitzen aus die vier andern unter äquianharmonischem Doppelverhältnis sieht; in dieser liegt dann ein Selbstberührungspunkt, dessen doppeltgezählte Tangente die obige C^2 wird. Harald Geppert (Berlin).

Apéry, Roger: Sur la non-existence de courbes planes du huitième degré de genre 5 admettant $r \geq 14$ rebroussements. C. R. Acad. Sci., Paris 214, 340—341 (1942).

Verf. beweist, indem er die ebene C^8 als Projektion einer Raumkurve auffaßt und mittels des Riemann-Rochschen Satzes die mögliche Höchstzahl ihrer scheinbaren Spitzen abschätzt, daß es keine C^8 mit 16 Spitzen, oder 15 Spitzen und 1 Doppelpunkt, oder 14 Spitzen und 2 Doppelpunkten gibt; diese Kurven sind vom Geschlecht 5 und haben die weiteren Plückerschen Zahlen: Klasse 8 bzw. 9, 10, Wendepunktszahl 16 bzw. 18, 20, Doppeltangentenzahl 0 bzw. 5, 11. Andererseits hat Verf. in einer voran-

gehenden Arbeit (vgl. dies. Zbl. 26, 253) C^8 mit 15 Spitzen und solche mit 14 Spitzen und 1 Doppelpunkt konstruiert; also sind die oben genannten drei Typen die einzigen nichtvorhandenen C^8 mit nichtnegativen Plückerschen Zahlen.

Harald Geppert (Berlin).

Masotti Biggiogero, Giuseppina: Sul comportamento della hessiana in un caso semplice di singolarità straordinaria. Ist. Lombardo, Rend., III. s. 74, 317—324 (1941).

Villa (dies. Zbl. 2, 53; 3, 71; 4, 269; 5, 116, 370) hat auf zwei verschiedenen Wegen die Aufgabe gelöst, in jedem Falle die Vielfachheit der Hesseschen Kurve H in einem gegebenen Punkte einer vorgegebenen ebenen algebraischen Kurve F zu bestimmen, und hat auch umfassendere Aufgaben gelöst. Verf. betrachtet nun den Fall, in dem F einen Doppelpunkt O besitzt, dem eine Folge von r Doppelpunkten in allgemeiner Lage unendlich benachbart sind, und zeigt, daß dann H in O einen dreifachen Punkt besitzt, von dem eine Folge von r unendlich benachbarten dreifachen Punkten ausgeht, die auf dem gleichen linearen Zweig aufeinander folgen, dem die betrachteten r Doppelpunkte angehören.

Mario Villa (Bologna).

Salini, Ugo: Gruppi satelliti e gruppi tangenziali di specie h sulle curve algebriche piane. Atti Accad. Gioenia Catania, VI. s. 4, mem. 18, 1—8 (1940).

In der Ebene sei eine irreduzible Kurve n -ter Ordnung C_n vorgegeben. Wir bezeichnen mit C_h eine zweite Kurve der Ordnung h , die durch einen Punkt P der C_n geht und mit ihr daselbst eine p -punktige Berührung aufweist. Es wird vorausgesetzt $0 < p < hn$, $p \leq \frac{1}{2}h(h+3)$; r bezeichnet die Differenz $r = \frac{1}{2}h(h+3) - p$. C_h schneidet C_n außerhalb des Punktes P in einer Gruppe von $hn - p$ Punkten, die Verf. mit $S_{h,r}(P)$ bezeichnet und die er Begleitgruppe h -ter Gattung r -ter Klasse des Punktes P auf C_n bezüglich C_h nennt. Die Begleitgruppe 0-ter Klasse ($r = 0$) wird auch als Tangentialgruppe der Gattung h des Punktes P bezeichnet. Diese letzte Definition ist eine Erweiterung der bei kubischen Kurven üblichen Benennung, wo man als Tangential eines Punktes P den außerhalb P liegenden Schnittpunkt zwischen der Kurve und der Tangente in P bezeichnet; Verf. hatte selbst in einer früheren Arbeit [Atti Accad. Gioenia Catania, VI. s. 2, mem. 15, 1—10 (1937); dies. Zbl. 17, 182] den Begriff des Tangentialpunktes zweiter Gattung auf den ebenen Kubiken eingeführt. — Weiterhin seien nun X_1, X_2, \dots, X_{kn} die Schnittpunkte zwischen C_n und einer weiteren Kurve C_k von k -ter Ordnung. Nach Festlegung von kn Zahlen h_1, h_2, \dots, h_{kn} , deren Summe m sein soll, werde für jeden der Punkte X_i ($i = 1, 2, \dots, kn$) eine der Gruppen $S_{h_i, r_i}(X_i)$ bestimmt, mit der Maßgabe, daß die Differenzen $r_i - \frac{1}{2}h_i(h_i+3)$ ($i = 1, 2, \dots, kn$) alle den gleichen Wert haben sollen. Insgesamt erhält man auf diese Weise eine Gruppe H_ϱ von $\varrho = ns$ Punkten mit $s = m - kp$. Es werde weiterhin mit dem Verf. vorausgesetzt, daß die Zahlen $k > 0$, $h_i > 0$, $r_i > 0$, $p < h_i n$ so gewählt werden, daß

$$(*) \quad \varrho > \sigma = \frac{1}{2}s(s+3), \quad \sigma \geq t = \varrho - \frac{1}{2}(n-1)(n-2)$$

sei. Unter diesen Annahmen beweist Verf., daß alle ϱ Punkte der Gruppe H_ϱ derselben Kurve C_s der Ordnung s angehören, wobei gemeint ist, daß es sich um wenigstens eine C_s handelt, die für $s \geq n$ die C_n nicht als Komponente enthält.

Zu den Ausführungen des Verf. sind drei Bemerkungen zu machen: 1. Nachdem Verf. die Definition der Gruppen $S_{h,r}(P)$ und $G_h(P)$ aufgestellt hat, bemüht er sich nicht um die Aufstellung von Bedingungen, die deren tatsächliche Existenz für einen allgemeinen Punkt P der C_n gewährleisten. Dies ist andererseits unerläßlich und führt zu gewissen arithmetischen Relationen zwischen den eingeführten Zahlen, die die gestellte Frage weiterhin verschärfen. 2. Bezüglich der Ungleichungen (*) bemerkt man sofort, daß die zweite überflüssig ist; in der Tat hat man, da s eine ganze Zahl ist, stets $\sigma \geq t$. Die erste Ungleichung (*) stellt nun eine recht einschränkende und durchaus nicht notwendige Bedingung dar. 3. Bei Prüfung des Vorgehens des Verf. zum Beweise seines oben genannten Satzes bemerken wir, daß Verf. zu Anfang einen Satz, der lediglich für $s < n$ Geltung hat, als völlig allgemein ausspricht, ohne ihn wesentlich auf ihn später zurückzugreifen. Hingegen wird ein Satz (gemeint ist der Satz in der Fußnote (2) des Textes) verwendet, der einige Zweifel zuläßt, insofern als er nur „im allgemeinen“ gilt, d. h. für Punktgruppen, die als „allgemein“ anzusehen sind, während nicht explizit bewiesen wird, daß die Punkte, auf die er angewandt wird, dieser Bedingung

genügen. Auch hier ist eine weitere Präzisierung erforderlich. — Jedenfalls ist der Satz des Verf. richtig und läßt sich leicht in völliger Strenge beweisen. Verf. beschließt die Arbeit mit Anwendungen seiner Ergebnisse auf die Kurven niedrigster Ordnung. Sieht man von den Fällen ab, für die die in 1. genannte Lücke noch auszufüllen bleibt, so erhält man neben bekannten oder unmittelbar zu bestätigenden Resultaten einige nicht uninteressante Sätze, die wahrscheinlich bisher nicht explizit ausgesprochen worden sind. *L. Campedelli* (Firenze).

Babbage, D. W.: A note on the quadrics through a canonical curve. J. London Math. Soc. 14, 310—315 (1939).

Das kanonische Modell einer nichthyperelliptischen Kurve vom Geschlecht $p > 3$ ist eine einfache Kurve C^{2p-2} des S_{p-1} , die auf $\frac{1}{2}(p-2)(p-3)$ linear unabhängigen V_{p-2}^2 liegt; sie ist für $p > 4$ sogar der vollständige Schnitt dieser V_{p-2}^2 mit Ausnahme zweier Fälle: a) wenn C eine g_3^1 trägt, werden deren Gruppen von Trisekanten ausgeschnitten, die eine rationale normale Regelfläche V_2^{p-2} bilden, durch die alle genannten V_{p-2}^2 hindurchgehen; b) wenn $p = 6$ ist und C eine g_2^2 trägt, werden deren Gruppen durch Ebenen ausgeschnitten, bestimmen also Kegelschnitte, die eine Veronesesche Fläche V_2^3 erfüllen, die allen V_{p-2}^2 gemein ist. Der für diese Tatsache gegebene Beweis von Enriques (F. Enriques — O. Chisini, Teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche, 3, Bologna 1924, S. 97—108) ist insofern lückenhaft, als er annimmt, daß jene V_{p-2}^2 keine nicht durch C gehende gemeinsamen Mannigfaltigkeiten besitzen. Verf. gibt daher, im wesentlichen mit den Gedanken von Enriques, einen vervollständigten Beweis. Die Hauptpunkte sind folgende: 1. durch C gehen genau $\frac{1}{2}(p-2)(p-3)$ linear unabhängige V_{p-2}^2 ; 2. diese V_{p-2}^2 können keine V_k mit $k \geq 3$ gemein haben; 3. enthalten die V_{p-2}^2 eine durch C gehende V_2 , so hat diese die Ordnung $p-2$ und ist also entweder eine rationale normale Regelfläche oder eine Veronesesche Fläche (was den obengenannten Ausnahmefällen a, b entspricht); 4. enthalten jene V_{p-2}^2 einen zu C fremden Punkt O , so auch eine C und O enthaltende Fläche, also eine V_2^{p-2} . Der Beweis dieses letzten, neuen Punktes geht davon aus, daß, wenn man C mit einem allgemeinen S_{p-2} durch O in $P_1 \dots P_{2p-2}$ schneidet, von den $2p-1$ Punkten O, P_1, \dots, P_{2p-2} keine $p-1$ einem S_{p-3} angehören, hingegen diese $2p-1$ Punkte auf einer eindeutig bestimmten nichtsingulären rationalen Normalkurve C^{p-2} des S_{p-2} liegen.

Harald Geppert (Berlin).

Franchetta, A.: Sulla caratterizzazione delle curve eccezionali riducibili di prima specie. (Bologna, 4.—6. IV. 1940.) Atti 2. Congr. Un. Mat. Ital. 303—304 (1942).

Inhaltsangabe der in dies. Zbl. 25, 360 besprochenen Arbeit gleichen Titels.

Harald Geppert (Berlin).

Conforto, Fabio: Sulle singolarità di alcune superficie algebriche. (Bologna, 4.—6. IV. 1940.) Atti 2. Congr. Un. Mat. Ital. 264—270 (1942).

Es gibt drei Typen rationaler F_4 mit Doppelpunkt und Ebenenschnitten vom Geschlecht 3, nämlich 1) die $F_4^{(1)}$ mit Berührungsknoten, 2) die $F_4^{(2)}$ von Noether, 3) die $F_4^{(3)}$ von Noether. Verf. hat die beiden letzten Flächenklassen in zwei vorangehenden Arbeiten (dies. Zbl. 21, 55) untersucht und insbesondere die Existenz einer gemeinsamen Flächenklasse $F_4^{(2,3)}$ festgestellt. Hier untersucht er nun die Flächen $F_4^{(1,2)}$ bzw. $F_4^{(1,3)}$, die gleichzeitig zur ersten und zweiten bzw. zur ersten und dritten Klasse gehören, sowie die allen drei Klassen zugleich angehörenden Flächen $F_4^{(1,2,3)}$. Die Gleichung von $F_4^{(1,2)}$ kann in die Form:

$$(1) \quad z^2 - 2azx^2 + (b_1y + b_2z)zx + (c_1y^2 + c_2yz + c_3z^2)z + a^2x^4 - a(b_1y + b_2z)x^3 + \gamma_2(y, z)x^2 + \gamma_3(y, z)x + \gamma_4(y, z) = 0,$$

γ_i -Formen i -ten Grades, gebracht werden, diejenige der $F_4^{(1,3)}$ hingegen auf

$$(2) \quad z^2 + (b_1y + b_2z)zx + (c_1y^2 + c_2yz + c_3z^2)z + dx^3 + \gamma_2(y, z)x^2 + \gamma_3(y, z)x + \gamma_4(y, z) = 0,$$

während $F_4^{(1,2,3)}$ aus (1) bzw. (2) durch die Spezialisierung $a = 0$ bzw. $d = 0$ entsteht. Man erhält diese Gleichungen also aus den a. a. O. angeführten Gleichungen der $F_4^{(2)}$, $F_4^{(3)}$, $F_4^{(2,3)}$ jeweils durch Spezialisierung eines einzigen Parameters. — Durch

Proiezione vom Doppelpunkt O aus kann man alle diese Flächen in Doppelsebenen überführen; deren Übergangskurve ist für $F_4^{(1)}$, $F_4^{(1,2)}$, $F_4^{(1,3)}$ und $F_4^{(1,2,3)}$ eine C_4 , für $F_4^{(2)}$, $F_4^{(3)}$ und $F_4^{(2,3)}$, wie schon a. a. O. festgestellt, eine C_6 mit einem vierfachen bzw. zwei benachbarten dreifachen bzw. einem vierfachen und einem benachbarten zweifachen Punkt. — Als rationale Flächen lassen sie sich durch je ein ebenes Kurvensystem abbilden, und zwar: $F_4^{(1)}$ durch $C_6(A_1^2 \cdots A_7^2, A_8, \dots, A_{11})$, d. h. das System der C_6 mit den Doppelpunkten $A_1 \cdots A_7$ und den einfachen Basispunkten $A_8 \cdots A_{11}$; $F_4^{(2)}$ durch $C_7(A_1^3, B_1^2 \cdots B_8^2)$, $F_4^{(3)}$ durch $C_9(A_1^3 \cdots A_8^3, B^2, E)$, wobei die Basispunkte jedesmal in passender Weise auf einer elliptischen C_3 liegen. Für die gemeinsamen Flächenfamilien gewinnt Verf. hieraus durch Grenzübergang die folgenden Bildsysteme: für $F_4^{(1,2)}$ die $C_6(A_1^2 \cdots A_7^2, A_8 \cdots A_{11})$, wo $A_1 \cdots A_6$ auf einer C_2 , $A_7 \cdots A_{11}$ auf einer C_2 nicht berührenden Geraden liegen; für $F_4^{(1,3)}$ die $C_6(A_1^2 \cdots A_7^2, A_8 \cdots A_{11})$, für die es eine $C_3(A_1 \cdots A_9, A_{10}^2)$ gibt, während A_{11} zu A_{10} benachbart liegt; für $F_4^{(1,2,3)}$ die $C_6(A^3 B_1^2 \cdots B_5^2, B_6, B_7, B_8)$, für die es eine Fundamental- $C_3(A^2 B_1 \cdots B_7)$ gibt, während B_8 zu A benachbart liegt; das Bildsystem für $F_4^{(2,3)}$ ist a. a. O. angegeben.

Harald Geppert (Berlin).

Campedelli, Luigi: La classificazione dei piani doppi con tutti i generi uguali all'unità. (Bologna, 4.—6. IV. 1940.) Atti 2. Congr. Un. Mat. Ital. 248—253 (1942).

Wiedergabe der Hauptgedanken der in dies. Zbl. 23, 366, 367 besprochenen Arbeiten des Verf.

Harald Geppert (Berlin).

Burniat, Pol: Sur les surfaces de bigenre 1 normales dans S_4 . Bull. Acad. Roy. Belg., V. s. 27, 558—568 (1941).

Il lavoro ha per scopo di determinare tutti i tipi di superficie, F , di bigenere uno, che sono normali nello spazio a quattro dimensioni e che posseggono una curva multipla propria. Aggiungiamo, per maggior precisazione, che si intende parlare di superficie (regolari) di genere zero con una curva bicanonica d'ordine nullo. Cosicché, detto $|C|$ un sistema lineare (completo) di curve tracciate sopra la F , se $|C'|$ ne è l'aggiunto, si ha $|C| \equiv |C'|$ e $|2C| \equiv |2C'|$, cioè le C sono curve semi-bicanoniche. — Supposto, in particolare, che le curve C siano le sezioni iperpiane della F , esse risultano d'ordine 8 e di genere 5. Quindi per giungere a costruire le superficie F , si rende necessario lo studio e la classificazione delle curve C , dell'ottavo ordine e di genere cinque, che sono normali nello spazio S_3 , e su cui le quadriche segano dei gruppi bicanonici. Il Burniat risolve questo problema preliminare, e — richiamandosi anche a risultati da lui conseguiti in un suo precedente scritto [Bull. Soc. Roy. Sci. Liège 10, 374—378 (1941)] — conclude che esistono i seguenti tre soli tipi di curve C : a) curve C dotate di un punto quadruplo, O , che nascono come intersezione completa di un cono quadrico, Γ , avente il vertice in O , con una superficie del quarto ordine che passa doppiamente per O ed ivi oscula quattro generatrici di Γ ; b) curve C date dalla intersezione residua di due superficie cubiche passanti per una medesima retta d , e che si toccano in due punti (doppi per la C) nei quali il piano tangente contiene la d ; c) curve C ciascuna delle quali è l'intersezione completa di una quadrica, φ_2 , e di una superficie del quarto ordine, che si toccano in quattro punti (doppi per la C), costituenti i vertici di un quadrilatero sghembo formato con generatrici della φ_2 . — Quali superficie F corrispondono a questi tre casi? L'A. prova che: α) non esistono superficie F le cui sezioni iperpiane siano del tipo a); β) il caso b) porta ad una superficie F con una curva doppia del secondo ordine costituita da due rette sghembe, a_1 e a_2 : si tratta della superficie residua intersezione di dueipersuperficie cubiche di S_4 che passano per un piano π , e che toccano lungo a_1 e a_2 , rispettivamente, due iperpiani ω_1 e ω_2 , tali che $\pi = (\omega_1, \omega_2)$; γ) in S_4 , la superficie F che ha come sezioni iperpiane le curve di cui in c), possiede quattro rette doppie, a_1, a_2, a_3, a_4 , uscenti da un medesimo punto, A (quadruplo per la F), e si ottiene quale intersezione di un certo ipercono quadrico, Φ_2 , con una particolareipersuperficie del quarto ordine, Φ_4 : l'ipercono Φ_2 ha il vertice in A , e passa per i piani $a_1 a_2, a_2 a_3, a_3 a_4, a_4 a_1$ (che costituiscono il cono tangente in A alla F), mentre

Φ_4 è tangente a Φ_2 lungo le rette a_1, a_2, a_3, a_4 stesse ed oscula in A quei piani. — Dalla F di cui in γ), per proiezione da A in un S_3 , si ottiene una quadrica doppia con una curva di diramazione del dodicesimo ordine, costituita dai lati di un quadrilatero sghembo e da una curva dell'ottavo ordine passante doppiamente per i vertici di quello. Ciò che costituisce un tipo ben noto di superficie di bigenere uno nello spazio ordinario. — Terminando, l'A. avverte che tra le F di cui in β), se ne trovano talune che risultano invarianti rispetto ad un opportuno gruppo abeliano d'ordine otto, di trasformazioni birazionali dell' S_4 in sè, le cui trasformazioni generatrici sono, oltre all'identità, tre trasformazioni quadratiche ed un'omografia. — Le superficie dei tipi β) e γ) erano già state incontrate dal Nostro fino dal 1936 [Mém. Soc. Roy. Sci. Liège, IV. s., 1, 183—188 (1936); questo Zbl. 17, 183]; i risultati ora ottenuti mostrano che egli si era trovato di fronte alle sole superficie di bigenere uno, che sono normali in S_4 . L'interessante ricerca è condotta attraverso un serrato argomentare, ricco di accorgimenti e di osservazioni spesso suggestive, anche se talvolta possa nascere nel lettore il desiderio di essere guidato a soffermarsi più a lungo e più attentamente sopra alcuni particolari.

L. Campedelli (Firenze).

Martinelli, Enzo: Sulla varietà delle faccette p -dimensionali di S_r . Atti Accad. Italia, Mem., VI. s. 12, 917—943 (1941).

Als Mannigfaltigkeit $M^{(r,p)}$ der p -dimensionalen Elemente des S_r bezeichnet Verf. die Mannigfaltigkeit der inzidenten Elemente Punkt- S_p aus S_r , wobei p eine unterhalb r liegende positive Zahl bedeutet. Verf. bestimmt die Basis im Sinne von Severi (vgl. dies. Zbl. 8, 321) für die algebraischen Mannigfaltigkeiten der verschiedenen Dimensionen, die der $M^{(r,p)}$ angehören. Wählt man in S_r $p+1$ Räume $S_{a_0}, S_{a_1}, \dots, S_{a_p}$ ($0 \leq a_0 < a_1 < \dots < a_p \leq r$), von denen jeder in dem darauf folgenden enthalten ist, so betrachtet man die Schubertsche Form $[a_0, a_1, \dots, a_p]_k$ der Dimension $k = \sum a_s - \binom{p+1}{2}$, die aus allen den S_p des S_r besteht, die mit S_{a_s} ($s=0, 1, \dots, p$) einen S_s gemein haben. Verf. betrachtet die Mannigfaltigkeit $[a_0, \dots, \overset{*}{a_i}, \dots, a_p]_{k-i}$, die aus allen denjenigen p -dimensionalen Elementen besteht, die man dadurch erhält, daß man jedem S_p der obengenannten Schubertschen Form die in S_p und S_{a_i} zugleich liegenden Punkte des S_i zuordnet und beweist, daß die Basis der Dimension $k = 1, 2, \dots, (r-p)(p+1) + p - 1$ von allen möglichen k -dimensionalen Mannigfaltigkeiten des beschriebenen Typus gebildet wird. Die so erhaltene Basis ist eine Minimalbasis; im Sonderfalle der $(r-1)$ -dimensionalen Elemente (inzidente Elemente Punkt-Hyperebene) kann die Basis auf eine einfachere Form gebracht werden. Nennt man X, \mathcal{E} die aus den Elementen Punkt-Hyperebene gebildeten Mannigfaltigkeiten, die man erhält, wenn man einen festen Punkt den durch ihn gehenden Hyperebenen bzw. eine feste Hyperebene den auf ihr liegenden Punkten zuordnet, so wird die Minimalbasis von $M^{(r,r-1)}$ durch die Schnittmannigfaltigkeiten der μ Mannigfaltigkeiten X und der ν Mannigfaltigkeiten \mathcal{E} gebildet, die man für jede ganze Lösung μ, ν der Gleichung $\mu + \nu = 2r - k - 1$ unter den Bedingungen $0 \leq \mu \leq r - 1, 0 \leq \nu \leq r$ oder $0 \leq \mu \leq r, 0 \leq \nu \leq r - 1$ erhält. Im Falle der Elemente Punkt—Gerade der Ebene reduziert sich diese Basis auf die früher von Severi (dies. Zbl. 23, 372) gefundene. Ferner bestimmt Verf. ein Minimalmodell der Mannigfaltigkeit $M^{(r,p)}$, d. h. ein projektives Modell kleinster Ordnung, das ausnahmslos die Mannigfaltigkeit darstellt. Im Sonderfalle der $M^{(r,r-1)}$ wird ein derartiges Minimalmodell durch den allgemeinen Hyperebenenschnitt der Segreschen Produktmannigfaltigkeit zweier S_r gegeben.

Zappa (Roma)

Vektor- und Tensorrechnung. Kinematik:

Bagehi, Haridas: Note on equimomental and orthoconjugate complex of a force-system. Bull. Calcutta Math. Soc. 31, 81—86 (1939).

The author considers an arbitrary system of forces acting on a rigid body. This system is therefore equivalent with a single couple μ and a single force λ acting a

the origin. The lines round which the moments of the system (μ, λ) have a given value c form a quadratic complex except when $c = 0$. This „equimomental” complex connects with each point a cone. The author gives in several cases the locus of the points for which this cone has a special property (f. i. the cone possesses triads of perpendicular generators; consists of two planes, has a given semi-vertical angle). A quadratic complex related to the system (μ, λ) is the so-called ortho-conjugate complex. It consists of the lines each of which is perpendicular to its own conjugate with respect to the system (μ, λ) .

J. Haantjes (Amsterdam).

Differentialgeometrie in Euklidischen Räumen:

● **Eisenhart, Luther P.:** An introduction to differential geometry; with use of the tensor calculus. Princeton: Univ. press 1940. X, 304 pag. \$ 3.50.

Woude, W. van der: Über die Methode des beweglichen Achsenkreuzes (Anwendung in der Differentialgeometrie der Raumkurve). Mathematica, Zutphen B 11, 1—7 (1942) [Holländisch].

Aus den Bewegungsgleichungen eines starren Körpers im Raum lassen sich als Sonderfall die Formeln von Frenet gewinnen. Diese Anwendung der Methode wird besonders einfach und klar dargestellt und als Beispiel die Theorie der Bertrand-Kurvenpaare entwickelt.

Bol (Freiburg).

Whittemore, James K.: Bertrand curves and helices. Duke math. J. 6, 235—245 (1940).

Bei einer Bertrandkurve besteht zwischen Krümmung und Windung eine ganze lineare Beziehung; ist diese bekannt, so bewies schon Bianchi, daß die Kurven durch Quadraturen gefunden werden können. Darüber hinaus zeigt Verf., daß, wenn auch noch das sphärische Tangentenbild der Kurve willkürlich vorgegeben wird, die Kurve eindeutig (bis auf Verschiebungen) bestimmt und als Summe einer Kurve fester Krümmung mit einer solchen fester Windung und dem gleichen Tangentenbild darstellbar ist. Spezielle Bertrandsche Kurven sind die allgemeinen Schrauben- oder Böschungslinien einer Fläche. Verf. bestimmt diese für Kugel, Drehflächen 2. O. und allgemeine Drehflächen, wenn Dreh- und Schraubachse zusammenfallen. Seine Ergebnisse sind bekannt (vgl. W. Blaschke, Vorlesungen über Differentialgeometrie I, 3. Aufl., Berlin 1930, S. 40—42); sie betreffen die Orthogonalprojektion der Böschungslinien auf eine zur Schraubachse senkrechte Ebene und umgekehrt die Bestimmung einer passenden Drehfläche bei vorgegebener Projektion einer ihrer Böschungslinien.

Harald Geppert (Berlin).

Müller, Hans Robert: Über die Striktionslinien von Kurvenscharen. Mh. Math. Phys. 50, 101—110 (1941).

Étant donnée une famille de courbes Γ tracées sur une surface Σ , l'A. appelle ligne de striction le lieu (S) des limites S des points où la distance d'une courbe quelconque à une courbe infiniment voisine est un extrémum. Il démontre que: 1) Si Γ sont des géodésiques, elles sont parallèles, au sens de Levi Cività, le long de (S); 2) dans la même hypothèse, si on fait tourner les tangentes en S à Γ dans les plans tangents à Σ d'un même angle le long de (S), les géodésiques issues de ces nouvelles directions ont (S) également comme ligne de striction; 3) si deux familles de courbes se coupant sous un angle constant ont une même ligne de striction, celle-ci est ligne de striction pour n'importe quelle famille de courbes isogonales à chacune des deux familles considérées; 4) on considère les paires de courbes équidistantes, que l'on obtient en prenant sur chaque courbe Γ d'une famille de géodésiques, à partir de S , deux longueurs égales constantes. Si les deux courbes équidistantes se correspondent isométriquement, alors une courbe qui coupe isogonalement les Γ , a, aux points de rencontre avec les courbes équidistantes, les courbures géodésiques égales et de signes contraires, et réciproquement, etc. — Les trois premiers théorèmes énoncés généralisent des propriétés classiques de Darboux, Pirondini, Bonnet, Beltrami,

relatives à la ligne de striction d'une surface réglée. L'hypothèse et la conclusion de la 4-me propriété sont toujours vérifiées pour une surface réglée. *Al. Pantazi.*

Tonolo, Angelo: *Contributo alla trigonometria dei piccoli triangoli curvilinei tracciati sopra una superficie.* (Bologna, 4.—6. IV. 1940.) Atti 2. Congr. Un. Mat. Ital. 541—552 (1942).

Verf. benützt die Ergebnisse eigener Arbeiten (s. dies. Zbl. 20, 255; 22, 395; 23, 267), um eine neue trigonometrische Formel für „kleine“ Dreiecke auf einer Fläche anzugeben, welche in der dritten Annäherung gilt. Von dieser Formel werden zwei Anwendungen gemacht. Wegen Einzelheiten muß auf die Arbeit selbst verwiesen werden.

Hlavatý (Prag).

Vincensini, Paul: *Sur certaines congruences rectilignes appartenant à un complexe linéaire.* Ann. Fac. Sci. Univ. Toulouse, IV. s. 4, 97—115 (1940).

L'A. étudie l'effet d'une transformation d'une congruence n en une congruence C , qu'il appelle $T[F(Z)]$ et qui se définit géométriquement comme il suit. On projette un point O (centre de la transformation) en H sur un rayon de n ; on projette H en K' sur un plan xOy (plan de la transformation) passant par O ; on ramène OK' sur OK en le faisant tourner dans xOy de $\frac{\pi}{2}$, tout en le dilatant dans le rapport $F(Z)$, qui ne dépend que de l'angle u que fait le rayon de n avec la normale Oz (axe de la transformation) en O à nOy ($Z = \cos u$). Par le point K on mène la parallèle au rayon de n , qui engendre la congruence C . L'A. étudie, en particulier, le cas où n est une congruence de normales et C appartient à un complexe linéaire d'axe Oz . Il démontre entre autres: a) que les surfaces normales à n , sont les enveloppes d'un cylindre de génératrices parallèles à xOy qui tourne autour de Oz tout en se dilatant d'une manière arbitraire, b) lorsque l'enveloppe moyenne de C se réduit à un point sur l'axe, la surface moyenne est un conoïde droit de même axe, c) il en est de même lorsque C est à foyers équidistants de l'axe, d) réciproquement, tout conoïde droit d'axe Oz est surface moyenne à deux congruences C , appartenant chacune à un complexe linéaire de même axe, transformées T d'une congruence de normales, dont l'une est à enveloppe-moyenne point et l'autre à foyers équidistants de l'axe. Le travail fait suite à un autre publié dans Ann. Fac. Sci. Univ. Toulouse, III. s. 19, 93—166 (1927) et d'un troisième en cours de publication dans Ann. École norm. sup. *Al. Pantazi (Bucarest).*

Differentialgeometrie besonderer Liescher Gruppen:

Sbrana, Francesco: *Sopra alcune proprietà delle superficie.* (Bologna, 4.—6. IV. 1940.) Atti 2. Congr. Un. Mat. Ital. 313—321 (1942).

P sei ein elliptischer Punkt einer Fläche F , π seine Tangentialebene in P , α eine zu π parallele Ebene, welche aus F die Figur σ ausschneidet. Die Dupinsche Indikatrix von P ist eine Ellipse, welche man durch das Limitierungsverfahren aus einer Beharrungsellipse des Schnittes σ bekommt. Die Grenzlage der Geraden, welche P mit dem Schwerpunkt des Inhaltes I zwischen π und α verbindet, ist die Affinnormale. Der Beweis dieser Behauptungen beruht auf der Berechnung der Schwerpunkte von σ und I . Dabei wird die Flächengleichung in der Form

$$z = \frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{R_1} + \frac{y^2}{R_2} \right) + Ax^3 + Bx^2y + Cxy^2 + Dy^3 + \dots$$

angenommen und $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, $z = t^2$ und $r = a_1 t + a_2 t^2 + \dots$ gesetzt.

Hlavatý (Prag).

Abramescu, Nicolas: *Sur les sections d'une surface par des plans menés par une tangente, ou par une droite passant par un point de la surface.* Mathematica, Timișoara 18, 146—150 (1942).

O sei ein regulärer Punkt einer ebenen Kurve C , Ox seine Tangente, Oy eine weitere beliebige Gerade durch ihn, M_1, M_2 seien zwei zu O benachbarte Punkte auf C derart, daß OM_1, OM_2 die Geraden Ox, Oy harmonisch trennen; die Verbindungslinie

von O nach der Mitte von M_1, M_2 wird in der Grenze für $M_1, M_2 \rightarrow O$ zur „harmonischen Normalen“ (vgl. auch dies. Zbl. 24, 74), deren Pol bezüglich des Schmiegekegelschnittes K von C in O der „charakteristische Punkt“ auf Ox ist. Ist nun weiter O ein regulärer Punkt einer Fläche F , legt man durch eine Tangente derselben alle Ebenenschnitte und bestimmt deren Schmiegekegelschnitte, so erfüllen diese die zu der Tangente gehörige Moutardsche Quadrik; die harmonischen Normalen dieser Ebenenschnitte erfüllen eine durch O gehende Ebene. Legt man hingegen die Ebenenschnitte durch eine Gerade Oz , die F nicht berührt, so erfüllen die Schmiegekegelschnitte eine Fläche 9. Ordnung, die harmonischen Normalen einen Kegel 4. Ordnung.

Harald Geppert (Berlin).

Bompiani, Enrico: Sul birapporto di quattro punti di una curva. Boll. Un. Mat. ital., II. s. 4, 84—86 (1942).

Verf. zeigt, wie der von ihm eingeführte Begriff des Doppelverhältnisses von vier Punkten einer Kurve sich als Folge eines geometrischen Verfahrens einstellt, das die Laguerre-Forsyth'sche Normierung einer linearen homogenen Differentialgleichung beliebiger Ordnung umdeutet [Ann. Sci. Univ. Jassy 23, 75—105 (1937); dies. Zbl. 15, 403]. Es handelt sich demnach um ein Problem der Differentialgeometrie im großen. Hingegen ist der kürzlich von Marletta [Boll. Accad. Gioenia, III. s. 17 (1941)] eingeführte Begriff des Doppelverhältnisses von vier Punkten einer Kurve, der mit ihren Umgebungen gewisser Ordnungen verknüpft ist, von lokalem Charakter und hat nichts mit dem Gesamtverlauf der Kurve zu tun. Daher löst die Marlettasche Definition nicht die gleichen Probleme wie die von Bompiani und ist mit ihr nicht vergleichbar.

P. Buzano (Torino).

Weitzenböck, R., und W. J. Bos: Zur projektiven Differentialgeometrie der Regelflächen im R_4 . (7. Mitt.) Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. 44, 1185—1189 (1941).

In Fortsetzung der letzten Note über die Regelflächen dritter Ordnung F_3^2 des R_4 (dies. Zbl. 26, 152) werden nun die projektiven Ausartungsmöglichkeiten behandelt. Es ergeben sich, projektiv-invariant charakterisiert, 1. die beiden nichtabwickelbaren Regelflächen F_3^2 des R_3 als projektives Erzeugnis eines geraden und eines Kegelschnittes des R_3 , 2. die folgenden Möglichkeiten abwickelbarer Flächen F_3^2 : die ebene Kurve dritter Klasse, der Kegel dritter Ordnung des R_4 , der Kegel dritter Ordnung des R_3 , das Geradenbüschel.

K. Strubecker (Straßburg).

Bos, W. J.: Zur projektiven Differentialgeometrie der Regelflächen im R_4 . 9. Mitt. Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. 45, 184—188 (1942).

In dieser Mitteilung werden die Untersuchungen über die Differentialgeometrie der allgemeinen Regelflächen des R_4 wieder aufgenommen. Für sie sind mit den Bezeichnungen der früheren Noten (vgl. Weitzenböck, dies. Zbl. 23, 165, 270; 24, 78; 26, 152) die Größen $M'_{02} \equiv 0$ und $H \equiv 0$, und es ergibt sich dafür die folgende Einteilung: $\alpha) Q \equiv 0$: Die Heftfläche der Regelfläche ist nicht abwickelbar, d. h. aufeinanderfolgende Heftgeraden schneiden sich nicht; die Heftkurve ist eine quasi-asymptotische Linie im Sinne E. Bompianis. $\beta) Q \equiv 0, R \neq 0$: die Heftfläche ist abwickelbar, die Heftkurve ist asymptotische Linie der Regelfläche. $\gamma) Q \equiv 0, R \equiv 0$: die Heftkurve ist geradlinig. — In der 8. Mitteilung waren die Ebenen betrachtet worden, welche drei aufeinanderfolgende Erzeugenden der Regelfläche des R_4 schneiden. Darauf aufbauend werden nun jene Ebenen ermittelt, welche vier aufeinanderfolgende Erzeugenden treffen. Es wird gezeigt, daß es im allgemeinen Falle, wo $Q \equiv 0$ ist, zwei Ebenenbüschel (A), (B) gibt, deren Achsen den Heftpunkt H enthalten, welche zur Gänze aus solchen „Vierpunktebenen“ bestehen. In jedem dieser beiden Büschel gibt es sogar eine Ebene, welche fünf aufeinanderfolgende Erzeugenden der Regelfläche trifft und darum als „Fünfpunktebene“ bezeichnet werden kann. *K. Strubecker*.

Maxia, A.: Geometria proiettiva differenziale dei complessi anolonomi di rette. (Bologna, 4.—6. IV. 1940.) Atti 2. Congr. Un. Mat. Ital. 305—312 (1942).

Ein anholonomer Komplex kann folgendermaßen definiert werden: Jeder Ge-

raden B_0^* ($\kappa = 0, \dots, 5$) des Geradenraumes sei eine dreifache Schar der Chaslesschen Korrelationen zugeordnet. Der Inbegriff dieser Korrelationen ist der anholonome Komplex. Die Hauptkorrelation dieses Komplexes wird durch jeden Komplex der parabolischen Schar $N^* = \lambda B_0^* + \mu B_4^*$ induziert, wobei $B_4^* \neq B_0^*$ ein linearer Komplex ist, der mit drei linear unabhängigen, linearen Komplexen B_a^* ($a = 1, 2, 3$) der früher erwähnten dreifachen Schar in Involution steht. Außerdem läßt sich noch ein linearer, spezieller Komplex B_5^* derart bestimmen, daß er mit B_4^* in Involution steht und außerdem jeder Komplex der Schar $y^a B_a^*$ mit jedem Komplex der Schar $z^0 B_0^* + z^4 B_4^* + z^5 B_5^*$ in Involution ist. (Alle diese Begriffe sowie auch die Definition des anholonomen Komplexes können auch im Falle eines holonomen Komplexes verwendet werden, wo die B_a^* als Gradienten aufgefaßt werden können. Ref.) Das Simplex B_i^* ($i = 0, \dots, 5$) läßt sich derart bestimmen, daß die Tensoren $a_{bc}^{(r)} = B_r^* B_b^* \partial_c B_a^*$, ($r = 4, 5$, $b, c = 1, 2, 3$) apolar sind. Auf diesen Tensoren läßt sich die Theorie des anholonomen Komplexes aufbauen. Als Beispiel soll hier mindestens ein Satz erwähnt werden, der auch für holonome (Fubini) Komplexe gilt: Zu jedem Komplex $N^* = \lambda B_0^* + \mu B_4^*$ läßt sich ein „Kegel“ der Richtungen im Geradenraum derart bestimmen, daß die oskulierenden Lieschen Quadriken der Komplexflächen (welche durch den „Kegel“ bestimmt sind) in N^* liegen. (Die Gleichungen [3-2] müssen durch $= 0$ ergänzt werden. Die Bezeichnung „complesso lineare tangente“ für einen beliebigen Komplex $[\neq B_0^*]$ der Schar N^* scheint dem Ref. irreführend, da die durch N^* induzierte Chaslessche Korrelation mit jeder Chaslesschen Korrelation in Involution steht. Ref.) *Hlavatý.*

Haantjes, J.: Conformal differential geometry. 2. Curves in conformal two-dimensional spaces. Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. 45, 249—255 (1942).

Verf. hat in einer früheren Note (dies. Zbl. 25, 365) die konforme Differentialgeometrie der Kurven ebener konformer Räume R_n der Dimension $n > 2$ entwickelt. Im Falle $n = 2$ handelt es sich jetzt um die Transformationen der Möbiusschen Kreisverwandtschaften. Ist $a_{\kappa\lambda}$ der Fundamentaltensor des ebenen R_2 , so kommt die Untersuchung auf das Studium der gegenüber der Transformation $a'_{\kappa\lambda} = \sigma^2 a_{\kappa\lambda}$ invarianten Eigenschaften von Kurven hinaus, wobei der Faktor σ der Differentialbedingung

$$\partial_\nu s_\mu - s_\nu s_\mu + \frac{1}{2} a_{\mu\nu} s_\sigma s^\sigma = 0; \quad s_\nu = \partial_\nu \lg \sigma$$

unterliegt (mit Verwendung der Symbolik von Schouten-Struik). Diese Bedingung erscheint für $n > 2$ als direkte Folge des Verschwindens des Krümmungsaffinors von $a'_{\kappa\lambda}$. — Nach Einführung des konformen Kurvenparameters τ werden die Parameter $I_{\mu\lambda}^*$ der konformen Differentiation definiert und mit ihrer Hilfe die „Frenet-Serretschen“ Formeln der konformen Kurventheorie abgeleitet. In ihnen erscheint eine konforme Kurveninvariante fünfter Ordnung $h(\tau)$, die sog. Inversionskrümmung. Dann lautet die natürliche konforminvariante Kurvengleichung $h = h(\tau)$. Als spezielle Fälle von Kurven konstanter Inversionskrümmung ergeben sich Loxodromen. — Weiterhin entwickelt Verf. geometrische Deutungen aller in die Frenet-Serretschen Formeln eingehenden Parameter und Koeffizienten τ , Q_μ und h . Insbesondere entspricht dem kovarianten Vektor Q_μ ein System konzentrischer Kreise. Die geometrische Deutung der Invarianten h ist bereits von J. Maeda gegeben worden (dies. Zbl. 24, 174).

M. Pinl (Augsburg).

Lagrange, René: Propriétés différentielles des courbes de l'espace conforme à n dimensions. C. R. Acad. Sci., Paris 213, 551—553 (1941).

Die Methode einer früheren Arbeit [C. R. Acad. Sci., Paris 212, 1123—1126 (1941); dies. Zbl. 25, 365] wird vom dreidimensionalen auf den n -dimensionalen Raum erweitert. Wie dort werden gleichzeitig für den euklidischen Raum E und einen hyperbolischen Raum E_Σ die Frenetschen Formeln einer Kurve C aufgestellt, und aus diesen rekursiv

ein orthonormales n -Bein bestimmt, das vom absoluten Gebilde des E_S unabhängig, also konforminvariant ist. Die Ableitungsgleichungen dieses n -Beins führen auf die Konformkrümmungen von C (bis auf die erste). Dobbrack (Berlin).

Zito, Ciro: Alcune esplicitazioni sulle trasformazioni conformi dello spazio. Atti Accad. Peloritana Messina **41**, 86—92 (1939).

En partant de certaines formules de R. Calapso (ce Zbl. **12**, 85) qui donnent les coordonnées d'une surface S' , correspondant par une transformation bien déterminée de Lie à une surface S , l'A. se propose de caractériser le sous-groupe du groupe projectif de l'espace, qui change les surfaces S' entre elles, lorsque les surfaces S subissent les transformations du groupe conforme de l'espace. On trouve que c'est le sous-groupe du groupe projectif qui laisse invariant un certain complexe linéaire.

Al. Pantazi (Bucarest).

Hlavatý, Václav: Zur Lieschen Kugelgeometrie: 1. Kanallflächen. Sonderdruck aus: Věstn. Královské české Spol. Nauk **30** S. (1941).

Dieser erste Teil von Untersuchungen über die Liesche Kugelgeometrie ist den Kanallflächen gewidmet. Die Methode des Verf. beruht auf der Anwendung von hexasphärischen Kugelkoordinaten, so daß also eine Kugel als Punkt und eine Kanallfläche als Kurve auf einer im fünfdimensionalen projektiven Raume liegenden vierdimensionalen Quadrik Q dargestellt wird. Den Mittelpunkt der Theorie der Kanallflächen bildet die Aufstellung von Frenetschen Formeln für die entsprechenden Kurven auf Q , wobei drei Krümmungen k_1, k_2, k_3 definiert werden, und die damit zusammenhängende Klassifikation der Kanallflächen: 1. Halbzykliden ($k_3 = k_2 = k_1 = 0$); 2. Kongruenzflächen, aber keine Halbzykliden ($k_3 = k_2 = 0, k_1 \neq 0$); 3. Komplexflächen, aber keine Kongruenzflächen ($k_3 = 0, k_1, k_2 \neq 0$); 4. allgemeine Kanallflächen ($k_3, k_2, k_1 \neq 0$).

O. Borůvka (Brünn).

Mehr, Emanuel: The geometry of the triangle in the Kasner plane. Amer. Math. Monthly **48**, 535 (1941).

Riemannsche Mannigfaltigkeiten. Übertragungen:

Palatini, Attilio: Sopra le varietà di classe uno. Ist. Lombardo, Rend., III. s. **74**, 293—304 (1941).

Verf. setzt die bekannten Relationen, die die Bedingungen dafür ausdrücken, daß eine quadratische Form $ds^2 = \sum_{i,k=1}^n a_{ik} dx_i dx_k$ von der Klasse 1 sei, d. h. die Differentialform einer Hyperfläche eines euklidischen Raumes von $n+1$ Dimensionen sei, in eine explizite Gestalt um. Bezieht man sich auf das Haupt- n -Bein der Mannigfaltigkeit, so lauten diese Bedingungen folgendermaßen:

$$(A) \quad \gamma_{ih,ih} = \beta_i \beta_h, \quad \gamma_{ih,ik} = 0, \quad \gamma_{ih,jk} = 0,$$

$$(B) \quad B_{ikj} \equiv (\beta_i - \beta_k) \gamma_{ikj} - (\beta_j - \beta_k) \gamma_{ijk} = 0, \quad (C) \quad C_{jk} \equiv \frac{\partial \beta_j}{\partial s_k} - (\beta_j - \beta_k) \gamma_{ijk} = 0,$$

worin die $\gamma_{ijk}, \gamma_{ih,jk}$ die Riccisymbole mit drei und vier Indizes, ds_k das Bogenelement der k -ten Linie des n -Beins bedeuten. Man findet hieraus sofort, daß die Mannigfaltigkeiten mit konstanter positiver Krümmung der Klasse 1 angehören, während dies bei konstanter negativer Krümmung nicht der Fall ist. Führt man im Falle $n=3$ die Riemannschen Hauptkrümmungen in (A) ein, so ergibt sich insbesondere, daß ein ternäres ds^2 mit verschwindender Riemannscher Krümmung niemals zur Klasse 1 gehört. Im allgemeinen Falle $n \geq 4$, $\gamma_{ih,ih} \neq 0$ gelangt Verf. zum folgenden Ergebnis: Notwendig und hinreichend dafür, daß ein ds^2 zur Klasse 1 gehört, ist die Möglichkeit der Bestimmung von n Funktionen $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ derart, daß bei Beziehung auf das Haupt- n -Bein die Gleichungen (A) befriedigt werden. Es folgt die Untersuchung des Falles, in dem einige der $\gamma_{ih,ih}$ verschwinden.

Maxia (Firenze).

Botella Raduán, F.: Die Stetigkeit der Komponenten des Fundamentaltensors im Riemannschen Raum. — Eine Klasse nichtanalytischer Räume. *Rev. mat. hisp.-amer.*, IV. s. 2, 72—76 (1942) [Spanisch].

Verf. skizziert, wie die Untersuchung eines Riemannschen Raumes vorzunehmen ist, wenn die Annahme der Stetigkeit der ersten beiden Ableitungen der Komponenten des Fundamentaltensors abgeschwächt wird. *Maxia (Firenze).*

Tonolo, Angelo: Determinazione di una classe di varietà Riemanniane normali a tre dimensioni. *Ist. Lombardo, Rend.*, III. s. 74, 113—124 (1941).

Verf. leitet die Bedingung dafür ab, daß eine Riemannsche Mannigfaltigkeit V_3 , die konform auf den euklidischen Raum abbildbar ist, normal sei, d. h. daß die als voneinander verschieden vorausgesetzten Kurven der drei Hauptkongruenzen ein dreifach orthogonales Flächensystem bestimmen. Denkt man sich das ds^2 der V_3 schon auf die Form $ds^2 = H^{-2}((dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2)$ gebracht, so ist die gesuchte Bedingung eine lineare partielle Differentialgleichung dritter Ordnung für die Funktion H . In bezug auf ein allgemeines Tripel orthogonaler Kurvenkongruenzen in V_3 läßt sich die Bedingung der Normalität in folgender Form ausdrücken: $\Gamma_{hk}[\bar{V}_{k+2}\Gamma_{hk+1} - \bar{V}_{k+1}\Gamma_{hk+2}] = 0$. Darin bedeuten die Γ_{hk} die dem genannten Bezugssystem entsprechenden Komponenten der algebraischen Komplemente der Ricci-Symbole $\alpha_{\lambda\mu}$ innerhalb der Determinante $|\alpha_{\lambda\mu}|$, die noch durch die Diskriminante der Form $ds^2 = a_{\lambda\mu}dx^\lambda dx^\mu$ zu dividieren sind. *Maxia (Firenze).*

● **Bortolotti, Enea:** Spazi a connessione proiettiva. *Corsi del R. Istituto Nazionale di Alta Matematica*. Roma: Ediz. „Cremonese“ della S. A. Perella 1941. p. 315. Lire 60.—

Der vorliegende Band umfaßt den hauptsächlichsten Inhalt einer vom Verf. am R. Istituto di Alta Matematica in Rom im Jahre 1941 gehaltenen Vorlesung. — In der Einleitung erinnert Verf. zunächst in Kürze an die verschiedenen Theorien (Riemannsche Geometrien und Parallelismus nach Levi-Civita, projektive Differentialgeometrie, Ergebnisse von Beltrami, Schläfli und Klein über die Räume konstanter Krümmung und die Möglichkeit einer projektiven Geometrie in ihnen), die die Grundlage bilden, auf der die neuen Geometrien entstanden sind, und skizziert dann die Gedankenrichtung von Weyl, die mit einer gewissen Selbständigkeit von der amerikanischen Schule (Eisenhart, Veblen, I. M. Thomas, T. Y. Thomas, Douglas) fortgeführt worden ist, und die die projektiven Eigenschaften eines Raumes mit affinem Zusammenhang untersucht, sowie die davon unabhängigen Gedankenänge Cartans, der auf direktem Wege die projektiven Zusammenhänge konstruiert, indem er auf die Tangentialräume, die zu den einzelnen Punkten der Mannigfaltigkeit $X_n(u^1, u^2, \dots, u^n)$ gehören, zurückgreift. — Diese beiden Richtungen bestimmen auch die Teilung des vorliegenden Bandes in zwei Abschnitte, von denen der erste die projektive Geometrie eines Raumes mit affinem Zusammenhang, der zweite die Räume mit projektivem Zusammenhang im Sinne von Cartan behandelt. — Der erste Abschnitt besteht aus vier Paragraphen. § 1 gibt eine kurze Zusammenfassung für Kenner der Tensoralgebra und -analysis eines Raumes mit affinem Zusammenhang bis zur Aufstellung der Äquivalenzbedingungen zweier solcher Zusammenhänge, die auf verschiedene Parameter bezogen gedacht sind. — § 2 geht nun gleich auf den Grund der Sache mit dem Problem der projektiven Transformationen eines affinen Zusammenhangs. Es handelt sich also um die Aufsuchung aller affinen Zusammenhänge, die die gleichen geodätischen Linien (oder Autoparallelen oder auch Wege) wie ein vorgegebener affiner Zusammenhang mit den Komponenten L_{hk}^i besitzen. — So kommen auf rechnerischem Wege nach der Methode von T. Y. Thomas die „Komponenten des projektiven Zusammenhangs“ Π_{hk}^i hinein, die sich bei Ersetzung der L_{hk}^i durch die Komponenten einer anderen affinen Übertragung mit den gleichen geodätischen Linien nicht ändern, sowie der „projektive Parameter“ von Thomas auf den geodätischen Linien (§ 3). — Bekanntlich genügen die Π_{hk}^i nicht dem gleichen Transformationsgesetz wie die L_{hk}^i , und daher führt die mittels der Π_{hk}^i durch den gleichen Formalismus wie die mittels der L_{hk}^i konstruierte Ableitung nicht mehr Tensoren in Tensoren über, und, wie Verf. hervorhebt, erleidet der „projektive Parameter“ beim Übergang von den L_{hk}^i zu den \bar{L}_{hk}^i eine affine und nicht eine projektive Transformation und ist überdies gegenüber Koordinatentransformationen nicht invariant, besitzt also keine geometrische Bedeutung, was seine Betrachtung uninteressant macht. Die Π_{hk}^i können als Zwischenglied zur Konstruktion der beiden Weylschen Tensoren dienen, von denen einer die gegenüber projektiven Transformationen des Zusammenhangs invariante projektive Krümmung darstellt, während dem anderen diese Invarianzeigenschaft

nur für $n = 2$ zukommt. Mittels ihrer läßt sich auch die Bedingung dafür ausdrücken, daß ein Raum mit affinem Zusammenhang projektiv eben, d. h. auf einen gewöhnlichen affinen Raum derart abbildbar sei, daß die geodätischen Linien des ersten in die Geraden des zweiten übergehen. Analog (§ 3) kann der projektive Parameter von Thomas trotz seiner geometrischen Belanglosigkeit als Zwischenglied zur Konstruktion eines Systems projektiver Normalkoordinaten in einem Punkte O von X_n sowie eines projektiven Parameters auf den von O ausgehenden geodätischen Linien verwendet werden, der durch einen Wechsel in den krummlinigen Koordinaten einer linearen Transformation unterworfen wird. Dabei ist mit einigen Modifikationen das Verfahren von Veblen für die bekannte Konstruktion lokal-affiner Koordinaten zu wiederholen. — Dieses versuchsweise Vortasten ist sicherlich recht wenig befriedigend. Vom begrifflichen Standpunkt aus ist daher das Verfahren von Berwald (1936) vorzuziehen, der, um einen projektiven Parameter auf den geodätischen Linien festzulegen, von einer Schwarzschen Differentialgleichung ausgeht. Aber auch hier erfolgt die Bestimmung einer solchen Gleichung auf Grund von Plausibilitätskriterien, deren Notwendigkeit nicht einleuchtet; diese führen zu einer Erweiterung des Komponentensystems $\Gamma_{\lambda k}^i$ eines symmetrischen affinen Zusammenhanges mit vorgegebenen geodätischen Linien in ein neues System $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ mit $\lambda, \mu, \nu = 0, 1, \dots, n$, dessen Komponenten sich bei Variablenänderung wie diejenigen des symmetrischen affinen Zusammenhanges in $n + 1$ Dimensionen verhalten. Ebenfalls aus formalen Gründen, nämlich, um den auf den projektiven Parameter bezogenen Gleichungen der Geodätischen die gleiche Form zu geben, die sie in einem affinen Zusammenhang bei Beziehung auf einen affinen Parameter haben, wird man zur Einführung eines neuen Differentials du^0 und einer neuen Variablen (gauge variable) längs jeder geodätischen Linie gezwungen, denen ebenfalls keine geometrische Bedeutung zukommt. — In bezug auf die griechischen Zeiger und auf die $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ kann man projektive Theorien, kovariante Ableitungen und damit Krümmungstensoren einführen, und da die Erweiterung der $\Gamma_{\lambda k}^i$ zu den $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ in weitem Maße willkürlich ist, lassen sich die hinzugefügten neuen Komponenten so bestimmen, daß für sie die projektive Krümmung verschwindet. Man erhält so ein Komponentensystem eines projektiven Zusammenhanges $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$, der mit dem normalen Zusammenhang identisch ist, der auf ganz anderem und geometrisch auch noch nicht geklärtem Wege von Cartan eingeführt wurde. — Auch der normale Zusammenhang von Thomas, der in bezug auf ein bestimmtes krummliniges Bezugssystem definiert wird, ist kein geometrischer Begriff, der lediglich mit der projektiven Geometrie der Mannigfaltigkeit mit affiner Übertragung zusammenhängt. — Der zweite Abschnitt ist den projektiven Zusammenhängen im Sinne von Cartan gewidmet. Zunächst betrachtet Verf. eine Mannigfaltigkeit in einem projektiven Umgebungsraum und untersucht die Korrespondenz zwischen Berührungsräumen in unendlich benachbarten Punkten, die durch Projektion eines Raumes auf den anderen von einem passenden Festraum aus entsteht. Diese Korrespondenz zwischen den Punkten der beiden Räume ist das erste Beispiel eines projektiven Zusammenhanges; analytisch läßt sie sich durch Parameter $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ ausdrücken, die dem schon oben behandelten Gesetz genügen. Schon bei diesem einfachen Falle treten infolge des in den homogenen Koordinaten freibleibenden Proportionalitätsfaktors Unannehmlichkeiten auf. Verf. kommt das Verdienst zu, die verschiedenen Typen lokaler Bezugssysteme sauber unterschieden zu haben, jedoch ist ihre geometrische Kennzeichnung nicht vollständig, da die von Whitehead und Čech angegebene Konstruktion hinfällig ist. — Der Gedanke des projektiven Zusammenhanges als projektiver Korrespondenz zwischen unendlich benachbarten Berührungsräumen läßt sich nach Cartan auf eine beliebige X_n übertragen, indem man in Gedanken jedem Punkte der X_n einen projektiven S_{n-1} der als Tangentialraum bezeichnet wird, zuordnet. Man bestimmt auf diese Weise das Tangentialbild einer Kurve auf dem zu einem ihrer Punkte gehörigen Tangentialraum, und dieses führt zu der vom Verf. eingeführten Deviationsprojektivität sowie zu einem Parametersystem des Zusammenhanges, das die Konstruktion kovarianter Ableitungen projektiver Tensoren ermöglicht. — Auch hier lassen die Bezugssysteme und die durch analytische Zweckmäßigkeitsgründe nahegelegten zusätzlichen Bedingungen keine geometrischen Deutungen zu. — Die Geodätischen des Zusammenhanges sind die Kurven mit geradlinigem Tangentialbild. Ihre Differentialgleichungen können durch Einführung eines projektiven Parameters auf ihnen und einer neuen Variablen u^0 (man denke an die gauge variable von oben) auf die gleiche Form gebracht werden wie im affinen Falle. Verf. beweist, daß die affinen Zusammenhänge mit gleichen Geodätischen durch Vorgabe eines Feldes von Hyperebenen auf den Tangentialräumen bestimmt sind. Ein weiteres Verdienst des Verf. ist die tatsächliche geometrische Konstruktion der projektiv ebenen Räume, die auf einen projektiven S_{n-1} derart abbildbar sind, daß die Geodätischen des Zusammenhanges in gerade Linien übergehen. — Das zyklische Herumführen der Tangentialräume leitet dann zum Begriff der Krümmung und der Windung über; es ist jedoch zu beachten, daß im Gegensatz zum affinen Falle das Verschwinden der Krümmung das Verschwinden der Windung nach sich zieht. — In der Cartanschen Theorie erscheint die Konstruktion der zu einem Punkte O gehörigen projektiven Normalkoordinaten viel natürlicher als in der Theorie der amerikanischen Schule: Es sind nämlich die inhomogenen

genen projektiven Koordinaten der Bildpunkte, die zu den Punkten der Mannigfaltigkeit im Tangentialraum von O entstehen, indem man zu jedem Punkte $P \neq O$ das Tangentialbild der Geodätischen OP konstruiert. Von diesen Koordinaten aus gelangt man zu homogenen Koordinaten, zu einem projektiven Parameter auf den Geodätischen und schließlich zu einem bis auf ganze lineare Transformationen definierten sogenannten anholonomen Parameter. Neben den holonomen normalen Bezugssystemen lassen sich auch anholonome Bezugssysteme einführen, die vorläufig einen stärker betonten geometrischen Charakter haben als die anderen, und die entweder nach dem Vorgehen von Cartan (1937) definiert werden können, der jedoch nicht eine Darstellung der projektiven Tensoren in dem Tangentialraum angibt, oder nach der Methode von Bortolotti (1940), die eine Erweiterung des von ihm im affinen Falle eingeschlagenen Verfahrens darstellt. Schließlich berichtet Verf. auch über die homogenen krummlinigen Koordinaten, die von van Dantzig, Schouten und Haantjes benutzt wurden, sowie über die entsprechenden Zusammenhangsparameter, die damit gebildeten kovarianten Ableitungen, Krümmung und Windung; jedoch ist ihr geometrischer Gehalt schwer herauszuschälen. — Nachdem so für die projektiven Zusammenhänge Normalkoordinaten und -bezugssysteme eingeführt sind, ist es natürlich, zu den Erweiterungen der projektiven Tensoren und zu den normalen projektiven Tensoren überzugehen; dies geschieht hier durch eine Erweiterung der vom Verf. (1940) für den affinen Fall angegebenen geometrischen Konstruktion. — Dies ist die einzige, nicht formale Rechtfertigung der von der amerikanischen Schule in den letzten 20 Jahren eingeführten und verwendeten Operation der Erweiterung: Eine weitere Rechtfertigung, auf die Verf. (S. 88, 200, 201, 282, 286) hinweist, die ihm Ref. (1939/40) mitgeteilt hat, ist bisher noch nicht veröffentlicht worden. Schließlich folgt im allgemeinen Teil die $(n+1)$ -dimensionale affine Deutung der projektiven n -dimensionalen Zusammenhänge. Die Möglichkeit hierzu entspringt daraus, daß man den Parameter u^0 (Whitehead) auch als krummlinige Koordinate oder die homogenen krummlinigen Koordinaten von van Dantzig und Schouten betrachtet; sieht man jedoch von den formalen Analogien ab, so behandelt man in Wirklichkeit auf diese Weise gar nicht die Geometrie einer X_{n+1} mit affinem Zusammenhang, sondern diejenige einer X_{n+1} und einer Linienkongruenz in X_{n+1} , was etwas ganz anderes ist. — Ebenfalls von geringem geometrischen Inhalt (wenigstens zur Zeit) scheinen die allgemeineren projektiven Ableitungen in homogenen und nichthomogenen Koordinaten zu sein, die durch Fallenlassen einiger auf die Parameter der $(n+1)$ -dimensionalen Deutung bezüglichen Beschränkungen entstehen. — Zwei weitere Paragraphen sind den Anwendungen der besprochenen Theorien gewidmet. Die erste Anwendung bezieht sich auf die zum größten Teil vom Verf. geleistete Untersuchung der Mannigfaltigkeiten in einem projektiven Raum oder besser dieser Mannigfaltigkeiten und eines Feldes von Räumen, die ihren Punkten zugeordnet werden; im Sonderfalle der Hyperflächen führt diese Untersuchung zum Analogon der für die Flächen des S_2 von Fubini eingeführten Formen; Verf. bemerkt selbst, daß diese Behandlung, die auf verschiedene Art auf die Räume mit projektivem Zusammenhang und auf anholonome Räume erweitert wurde, dem geometrischen Inhalt nicht gerecht wird. — Von größerem Interesse ist die andere Anwendung auf die projektive Theorie der Relativität. Nach einer kurzen Skizze der ersten Theorien von Einstein (1913/16) und Weyl (1918) zur Einbettung des elektromagnetischen Feldes in die Geometrie des Weltalls, von Eddington (1921), Einstein (1923/25), Eisenhart und I. M. Thomas (1926), Einstein (1928) und Straneo (1932) verweilt Verf. länger bei den Theorien von Kaluza (1921; Universum gleich V_4 , die einer Riemannschen V_5 angehört mit der Bedingung, daß die Ableitungen der untersuchten Größen nach der 5. Koordinate verschwinden), von Einstein und Mayer (1931; Universum gleich Riemannsche V_4 , der in jedem Punkte ein euklidischer R_5 zugeordnet ist) und von Vranceanu (1935; Universum gleich anholonome Hyperfläche mit Riemannscher Metrik im 5-dimensionalen Umgebungsraum). Der Veblenschen Theorie wird eine allgemeinere Theorie der Mannigfaltigkeiten mit projektivem Zusammenhang vorausgeschickt, in deren Tangentialräumen ein Feld von Quadriken vorgegeben ist, das beim projektiven Übertragungsgesetz erhalten bleibt; man hat also eine lokal-nichteuklidische Geometrie und ebenso eine euklidische Geometrie, indem man die Polaryhyperebene des Punktes bezüglich der zu ihm gehörigen Quadrik betrachtet. — Durch Spezialisierung der eingeführten Begriffe entstehen aus dieser Theorie sowohl diejenige von Veblen (1930) als auch die von Schouten (1935). — Den Band beschließen ein Verzeichnis von 217 Arbeiten, das mit der beim Verf. bekannten Sachlichkeit und Genauigkeit zusammengestellt ist, und eine Reihe kritischer Anmerkungen. Diesen kommt insofern besonderes Interesse zu, als sie die Stellung des Verf. bezüglich der erhaltenen Ergebnisse und seine Ansichten über deren mögliche Vertiefung zum Ausdruck bringen. Erst diese Noten geben einen Eindruck davon, welche große Arbeit Verf. durch Vergleich, Vereinheitlichung und neue Darstellung des vorhandenen Materials bei der Gestaltung seines Textes geleistet hat; und nur in ihnen finden sich mit größter Bescheidenheit versteckt die wesentlichen Beiträge, die Verf. selbst zur Theorie geleistet hat (kovariante Ableitung für Tensoren mit mehreren Indizesarten oder D -Symbolik, Tangentialbilder und Deviationsprojektivität, geometrische Konstruktion der projektiv ebenen Räume und der Erweiterungen, Klassifikation der Typen von Bezugssystemen usw.). — Vielleicht wird dem

Leser der vorliegenden Zusammenfassung recht wenig wirklich gesichert erscheinen in einer Theorie, die zu einer übergroßen Zahl von Arbeiten Veranlassung gegeben hat, aber es ist gerade eines der Ziele des R. Istituto di Alta Matematica, den verschiedenen Theorien auf den Grund zu gehen und den Klärungsprozeß zu beschleunigen, der allein zu neuen und haltbaren Entdeckungen führen kann. — Der vorliegende Band von Bortolotti stellt die gründlichste Zusammenfassung aller bisher in der Theorie der Zusammenhangsräume erreichten Ergebnisse und den ernstesten Versuch dar, sich durch den Dschungel der verschiedenen mühsamen und teilweise illusorischen Formalismen einen Weg zum Licht der geometrischen Wahrheiten zu bahnen. Keiner, der auf diesem Weg fortschreiten will, wird das Werk entbehren können. *Bompiani* (Rom).

Bortolotti, Enea: Coordinate normali ed „estensioni“ nella geometria degli spazi a connessione lineare. (*Bologna*, 4.—6. IV. 1940.) Atti 2. Congr. Un. Mat. Ital. 322 (1942).

Vgl. dies. Zbl. 25, 368.

Harald Geppert (Berlin).

Bompiani, Enrico: Costruzione dei trasporti affini sopra una superficie. (*Bologna*, 4.—6. IV. 1940.) Atti 2. Congr. Un. Mat. Ital. 247 (1942).

Galvani, Octave: Sur la réalisation de certains espaces à parallélisme absolu par des congruences de droites. C. R. Acad. Sci., Paris 214, 337—339 (1942).

Seguendo il metodo del „riferimento mobile“ del Cartan si costruisce per una congruenza di rette dello spazio ordinario una connessione indotta. La connessione risulta dotata di torsione e di curvatura; nel caso particolare, studiato a parte, delle congruenze a cono direttore la curvatura risulta nulla. *Maxia* (Firenze).

Bortolotti, Enea: Geometria di sistemi alle derivate parziali. (*Bologna*, 4.—6. IV. 1940.) Atti 2. Congr. Un. Mat. Ital. 323—337 (1942).

Es sollen die invarianten Eigenschaften des Gleichungssystems

$$(1) \quad \frac{\partial^2 x^i}{\partial x^\lambda \partial x^\mu} = H_{\lambda\mu}^i(x, p), \quad (\lambda, \mu, \nu = 1, \dots, m; i, j, k = m+1, \dots, m+n),$$

(wo p für $p_\lambda^i \equiv \frac{\partial x^i}{\partial x^\lambda}$ steht) in bezug auf die Transformationen

$$(2) \quad x^\lambda = x'^\lambda(x^1, \dots, x^m), \quad x'^\nu = x'^\nu(x^1, \dots, x^{m+n})$$

aufgesucht werden. Das kann nach Verf. in folgenden Schritten geschehen: 1) Aus der bekannten Transformationsweise der (bis jetzt unbekannten) Übertragungskoeffizienten Γ_{BC}^A ($A, B, C = 1, \dots, n+m$) in bezug auf (2) erhält, daß $\Gamma_{BC}^A - \Gamma_{CB}^A, \Gamma_{ij}^\nu, \Gamma_{\lambda i}^\nu$ Tensoren sind, welche man gleich Null setzt. 2) Aus der Transformationsweise der übriggebliebenen Übertragungskoeffizienten $\Gamma_{jk}^i, \Gamma_{\lambda\mu}^\nu, \Gamma_{j\lambda}^i = \Gamma_{\lambda j}^i, \Gamma_{\lambda\mu}^i$ und aus der Transformationsweise der Ausdrücke $H_{\lambda\mu}^i, \frac{\partial}{\partial p_\nu^i} H_{\lambda\mu}^i, \frac{\partial}{\partial p_\nu^i \partial p_\nu^j} H_{\lambda\mu}^i$ erhält man (durch das Christoffelsche Verfahren, Ref.) drei Tensoren $T_{\lambda\mu}^i, F_{j\lambda\mu}^i, Q_{\lambda\mu jk}^{i\nu\omega}$. 3) Aus $Q_{\lambda\mu jk}^{i\lambda\mu} = 0$ bekommt man eindeutig Γ_{jk}^i , aus $F_{i\lambda\mu}^i = 0, F_{j\lambda\mu}^i = 0$ bekommt man $\Gamma_{\lambda\mu}^\nu, \Gamma_{j\lambda}^i$ bis auf additive unbekannte Γ_λ derart, daß zwei Systeme der Übertragungskoeffizienten Γ_{BC}^A und $*\Gamma_{BC}^A$, welche zu zwei verschiedenen Γ_λ gehören, mittels

$$(3) \quad *\Gamma_{BC}^A = \Gamma_{BC}^A + \delta_B^A \psi_C + \delta_C^A \psi_B \quad (\psi_C \text{ ist ein Vektor mit } \psi_i = 0)$$

verbunden sind. Daraus geht hervor, daß 4) die invarianten Eigenschaften des Systems (1) in bezug auf (2) durch die übliche bahntreue Transformationstheorie von (3) geliefert werden. Dabei werden die kovarianten Ableitungen in bezug auf Γ_{BC}^A durch das Christoffelsche Verfahren aus der Transformationsweise von Γ_{BC}^A und der zu behandelnden Größe erhalten. (Wir haben die Hauptschritte 1) bis 4) aus der ideenreichen Arbeit ausgezogen und separat gehalten, um den Gedankengang des zu früh verstorbenen Verf. zu unterstreichen.) *Hlavatý* (Prag).

Allgemeine metrische Geometrie. Konvexe Gebilde. Integralgeometrie:

Haupt, Otto: Raumbogen mit Punkten von beliebig vorgegebenem linearem Ordnungswert. J. reine angew. Math. 184, 77—90 (1942).

Verf. konstruiert für eine beliebige vorgegebene Zahl $n \geq 5$ einen sphärischen

Bogen mit scharfer Tangente von der linearen Ordnung n , dessen einer Endpunkt ein singulärer, nichtelementarer Punkt von der linearen Ordnung n ist; durch stereographische Projektion wird die Konstruktion auf die eines ebenen Bogens B^* mit scharfer Tangente von der zyklischen Ordnung n zurückgeführt, dessen einer Endpunkt ein singulärer, nicht elementarer Punkt von der zyklischen Ordnung n ist. Wir finden hier die Grundgedanken einer allgemeinen, weitreichenden Methode zur Gewinnung von Bogen, die in einem Punkt (allgemeiner: auf einer perfekter nirgends dichten Menge; vgl. eine andere Arbeit des Verf., dies. Zbl. 24, 83) eine vorgeschriebene Ordnungs- oder differentialgeometrische Singularität aufweisen: Verf. geht von einem Ellipsenbogen B , dem sog. „Gerüst“ von B^* , aus, wählt auf ihm eine Folge von Punkten P_v , welche monoton gegen den Endpunkt E konvergieren, und ordnet jedem P_v eine zweidimensionale Umgebung U_v zu, welche eine Reihe zweckmäßiger Eigenschaften besitzen soll; die Forderungen werden schrittweise auferlegt und durch sukzessive Verkleinerungen erfüllt, wobei diese Forderungen naturgemäß so gewählt sind, daß sie gegenüber solchen Operationen erblichen Charakter haben (z. B.: je zwei U_v sind fremd, ein Kreis kann nicht mehr als drei U_v treffen, . . .); jeder weitere Schritt läßt die schon erzwungenen Eigenschaften bestehen; nach diesen Vorbereitungen nimmt Verf. die Umformung des Gerüsts in den gewünschten Bogen vor, indem er einen abgeschlossenen, P enthaltenden Teilbogen von BU_v durch einen passenden Bogen \mathcal{B}_v ersetzt.

Chr. Pauc (Paris).

Neumann, B. H.: On some affine invariants of closed convex regions. J. London Math. Soc. 14, 262—272 (1939).

Sei X ein Punkt im Innern eines Eibereiches, PXQ eine gerichtete Sehne durch X , λ das Verhältnis $\frac{PX}{PQ}$, $\varrho(X)$ das Minimum von λ , wenn die Sehne um X gedreht wird, μ_1 das Maximum von $\varrho(X)$ für die Punkte X des Eibereiches. Dann ist $\frac{1}{3} \leq \mu_1 \leq \frac{1}{2}$, $\mu_1 = \frac{1}{3}$ gilt für Dreiecke und nur für sie, $\mu_1 = \frac{1}{2}$ für Mittelpunktseibereiche und nur für sie. Das Maximum $\varrho(X) = \mu_1$ wird an genau einer Stelle X erreicht und für mindestens drei Sehnen durch diesen Punkt ist $\lambda = \mu_1$. — Allgemeiner: sind $P_i X Q_i$, $i = 1, 2, \dots, n$, eine ungerade Anzahl von Sehnen durch X , bei denen je zwei Punkte P_i

durch ein Q_k getrennt werden, $\lambda_n = \sum_1^n \frac{P_i \bar{X}}{P_i Q_i}$, $\varrho_n(X)$ das Minimum von λ_n bei unab-

hängiger Drehung der Sehnen um X , μ_n das Maximum von ϱ_n bei Änderung von X , so ist $\frac{n-1}{2} \leq \lambda_n \leq \frac{n+1}{2}$ und $\frac{n-1}{2} \leq \mu_n \leq \frac{n}{2}$. Das Gleichheitszeichen tritt unter denselben Bedingungen wie oben auf, nur ist die Stelle X des Maximums nicht notwendig eindeutig bestimmt. — Verf. beweist den Satz zunächst für drei Sehnen und leitet daraus die anderen Ergebnisse her. Der erstgenannte Satz hängt zusammen mit folgendem: Ist B ein Eibereich, \tilde{B} das um π gedrehte, $\sigma \tilde{B}$ das größte ähnliche Vielfache von \tilde{B} , das noch in B hineinpaßt, so ist $\sigma \geq \frac{1}{2}$. Für jeden Eibereich ist nämlich $\mu_1 = \frac{\sigma}{1+\sigma}$. Die Beweismethoden sind rein elementar. Bol (Freiburg).

Blumenthal, O., und J. Wolff: Die isoperimetrische Aufgabe. Mathematica, Zutphen B 11, 12—26 (1942) [Holländisch].

Verff. geben drei, im wesentlichen bekannte, Beweise für die Lösung der isoperimetrischen Aufgabe in der Ebene an. Der erste ist der Lebesguesche Beweis (Bull. Soc. Math. France C. R. 1914, 72—76); der zweite betrachtet die Gesamtheit aller n -Ecke mit einer vorgegebenen Ecke und vorgegebenem Umfang L , beweist die Existenz eines Maximums für F , das für das reguläre n -Eck erreicht wird, geht zur Grenze über und stützt sich für die Einzigkeit des Kreises auf die Steinersche Viereckenkonstruktion; der dritte Beweis stimmt bis auf die funktionentheoretische Einkleidung mit dem Hurwitzschen (durch Fourierreihen) überein.

Harald Geppert.

Dinghas, Alexander: Zum isoperimetrischen Problem in Räumen konstanter Krümmung. Math. Z. 47, 677—737 (1942).

Verf. geht von der folgenden Aufgabe in der Ebene aus: In den Streifen $|x| \leq a$ ist eine geschlossene Kurve C der Länge L von möglichst großem Flächeninhalt J einzubeschreiben. Ihre Lösung entnimmt er dem Vergleich von C mit der linsenförmigen Kurve K_γ , die aus den beiden durch die Punkte $\pm a, 0$ gehenden Kreisbögen besteht, welche mit der x -Achse den Winkel $\frac{\pi}{2} - \gamma$ einschließen. Bezieht man durch gleiche x -Werte den oberen (bzw. unteren) Teil von C auf den oberen (bzw. unteren) Teil von K_γ und nennt n, \bar{n} die entsprechenden äußeren Normalen, so erhält man durch Auswertung des Integrals $\int_C \cos(n, \bar{n}) ds$ [statt $\int_C ds$!] die Beziehung

$$(1) \quad (J - J_\gamma) \cos \gamma = a(L - L_\gamma) - 2a \cdot R(C); \quad R(C) = \int_C \sin^2 \frac{(n, \bar{n})}{2} ds,$$

wo J_γ, L_γ sinngemäß Inhalt und Länge von K_γ bezeichnen. — Speziell gilt (1) für $\gamma=0$, wo K_0 zu einem Vollkreis vom Radius a wird; zieht man dessen oberen und unteren Halbkreis teleskopartig auseinander, bis die Mittelpunktse Entfernung $\bar{\gamma}$ geworden ist, so entsteht (unter Hinzunahme von Stücken der Streifengeraden $x = \pm a$) eine Kurve K_γ^* , für die aus (1) folgt: $J - J_\gamma^* = a(L - L_\gamma^*) - 2aR(C)$. Daher ist die eingangs gestellte Aufgabe für $L \leq 4a$ unlösbar, für $4a < L < 2\pi a$ gibt es eine linsenförmige Extremale K_γ mit passendem γ , für $2\pi a \leq L$ hingegen eine Kreis-Rechteck-Extremale der Gestalt K_γ^* mit passendem $\bar{\gamma}$. Insbesondere ist hierin die isoperimetrische Ungleichung enthalten. — Nun überträgt Verf. Problem und Methode auf die Kugel; als Streifen ist dabei ein symmetrischer Meridianstreifen $|\vartheta| \leq a$, ϑ = geographische Breite, zugrunde zu legen. Dann gibt es entsprechend für $4a < L < 2\pi \sin a$ eine linsenförmige, aus zwei Kreisbögen bestehende Extremale, für $2\pi \sin a \leq L < 2\pi \sin a + 2(2\pi - 2a) \cos a$ eine solche vom Kreis-Rechteck-Typus, während für größere Werte von L schlichte Extremalen nicht möglich sind. Für die hyperbolische Geometrie wird die Fläche $x = \operatorname{Sin} \vartheta$, $y = \operatorname{Cos} \vartheta \operatorname{Sin} \varphi$, $z = \operatorname{Cos} \vartheta \operatorname{Cos} \varphi$ und auf ihr der Streifen $|\vartheta| \leq a$ zugrunde gelegt; K_γ wird aus hyperbolischen Kreisbögen bzw. Abstandskurven zusammengesetzt; Länge und Inhalt sind in der entsprechenden hyperbolischen Metrik zu messen; die Extremale ist für $4a < L < 2\pi \operatorname{Sin} a$ linsenförmig, für größere Werte von L vom Kreis-Rechteck-Typus. — Für eine Drehfläche mit der Metrik $ds^2 = du^2 + \varphi(u)^2 dv^2$; $\varphi(u) = \varphi(-u)$

bei vollmonotonem $\omega(u) = \varphi(u)^{-1} \cdot \int_0^u \varphi(x) dx$ treten an die Stelle der Kreisbögen geodätische Kreisbögen fester geodätischer Krümmung, im übrigen ist die Methode mittels einer zu (1) analogen Ungleichung übertragbar. Im Streifen $|u| \leq a$ ist für

$4a < L < L_0 = 4\omega(a) \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{\omega^2(a) - \omega^2(x)}}$ die Extremale linsenförmig, für größere L vom

Kreis-Rechteck-Typus; Schlichtheitsgrenzen werden angegeben. — Der zweite Teil ist nun der Übertragung der Gedankengänge auf Rotationskörper im n -dimensionalen Raum konstanter Krümmung gewidmet. Im euklidischen R_n mit den Koordinaten x_1, \dots, x_n lautet z. B. die Aufgabe: Unter allen Drehkörpern \mathfrak{R} um die x_n -Achse, die im Zylinder $x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2 = a^2$ einbeschrieben sind, ist derjenige zu bestimmen, der bei vorgegebener Oberfläche O das größte Volumen V besitzt. Ist K_γ der von den beiden Kalotten $x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2 + (x_n \pm a \tan \gamma)^2 = \frac{a^2}{\cos^2 \gamma} = \varrho_\gamma^2$ begrenzte Körper, so gilt bei entsprechender Bezeichnung wie in (1)

$$(2) \quad (n-1)(V - V_\gamma) = \varrho_\gamma(O - O_\gamma) - 2\varrho_\gamma R_n(\mathfrak{R}); \quad R_n(\mathfrak{R}) = \int_O \sin^2 \frac{(n, \bar{n})}{2} dO.$$

Ist W_n das Volumen der n -dimensionalen Einheitskugel, so folgt hieraus

$$(n-1)V - Oa + W_n a^n = -2a R_n(\mathbb{R}) \leq 0$$

als Verschärfung einer von E. Schmidt (dies. Zbl. 22, 403) angegebenen Ungleichung. Die gestellte Aufgabe ist dann für $O \leq 2W_{n-1}a^{n-1}$ unlösbar und besitzt für größere O genau eine Lösung; diese ist für $O < nW_n a^{n-1}$ der linsenförmige Körper K , für größere O ein aus K , durch teleskopartiges Auseinanderziehen entstehender Körper vom Kugel-Zylinder-Typus. Die folgenden Paragraphen leisten die Verallgemeinerung auf den sphärisch bzw. hyperbolisch gekrümmten Raum; sie liefern naturgemäß einen neuen Zugang zu den entsprechenden isoperimetrischen Ungleichungen:

$$V \leq nW_n \cdot \int_0^Q \frac{x^{n-1} dx}{\sqrt{1 - Kx^2}}, \quad Q^{n-1} = \frac{O}{nW_n},$$

K = Raumkrümmung.

Harald Geppert (Berlin).

Angewandte Geometrie:

Graf, Ulrich: *Bewegte Anaglyphen auf gewölbten Flächen.* Dtsch. Math. 6, 394—408 (1942).

Wird ein stereoskopisches Bildpaar $F_{1,2}$ in Komplementärfarben gezeichnet — etwa F_1 rot, F_2 grün — und aus den zugehörigen Augpunkten $O_{1,2}$ mit einer Brille betrachtet, die in O_1 ein grünes und in O_2 ein rotes Glas hat, so nimmt man die räumliche Erscheinungsform des dargestellten Gebildes Γ wahr. Die Bildpaare $P_{1,2}$ der Raumpunkte \mathfrak{P} liegen auf Geraden, die durch den Schnittpunkt S der Geraden $[O_1O_2]$ mit der Bildebene Π gehen. Gewöhnlich wird S als Fernpunkt angenommen. ∞^4 zu Γ kollineare Erscheinungsformen entstehen, wenn man die Anaglyphe $F_{1,2}$ auf alle möglichen Augpunktpaare $O_{1,2}$ bezieht, für die $[O_1O_2]$ durch S geht. — In der vorliegenden Arbeit beschäftigt sich der Verf. mit einer bemerkenswerten Verallgemeinerung des Anaglypheneffektes, indem er die Bildebene Π durch eine Kegelfläche ersetzt, deren Spitze die Rolle des oben erklärten Punktes S übernimmt. Aus praktischen Gründen wird Π als Zylinder (Anaglyphenschirm) gewählt und die Basis $b = \overline{O_1O_2}$ konstant gehalten. Die ∞^3 dann noch möglichen Betrachtungslagen $O_{1,2}$ lassen sich auch bei festen Augpunkten $O_{1,2}$ durch solche Bewegungen des Anaglyphenschirmes herstellen, bei denen die Richtung S der Mantellinien festbleibt. Die zugehörigen räumlichen Erscheinungsformen verändern sich dabei stetig. Sie entsprechen einander in einer Gruppe von Punktverwandtschaften, die von der Form des Anaglyphenschirmes Π abhängt. Verf. gibt die allgemeine mathematische Theorie des Effektes und behandelt die Sonderfälle, wenn der Normalschnitt von Π eine Sinuslinie, ein Kegelschnitt, insbesondere ein Kreis ist. Hervorgehoben sei die Tatsache, daß mit Π als Zylinder 2. Ordnung die Erscheinungsformen einer Geraden i. a. Kegelschnitte sind, so daß eine Kegelfläche 2. Gr. i. a. als Fläche 4. Ordnung mit zwei Scharen von Kegelschnitten erscheint. — Man kann wohl voraussagen, daß in der Zukunft diese Anaglyphenzylinder in jeder Sammlung mathematischer Instrumente zu finden sein werden.

E. Kruppa (Wien).

● **Werkmeister, P.:** *Vermessungskunde. Tl. 1: Stückmessung und Nivellieren.* 7. Aufl. (Samml. Götschen Bd. 468.) Berlin: Walter de Gruyter & Co. 1942. 165 S. u. 145 Fig. geb. RM. 1.62.

Das weitverbreitete Bändchen bringt Verfahren der elementaren Vermessungskunde, nämlich die Horizontalmessungen (Stückmessung) und Vertikalmessungen (Nivellements). Die klare und übersichtliche, durch gute Figuren unterstützte Darstellung wird auch dieser 7. Auflage neue Freunde gewinnen. U. Graf (Danzig).

Richter, D. H.: *Bestimmung der ausgleichenden Messungslinie.* Z. Vermessungswes., Stuttgart. 71, 7—20 u. 60—67 (1942).

Bei Grenzwiederherstellungen mit älteren Messungsunterlagen tritt oft der Fall ein, daß die Beziehungen zwischen Örtlichkeit und Plan nur noch durch eine Anzahl mehr oder weniger

identischer Punkte hergestellt werden können. Die Aufgabe, unter solchen Umständen eine ältere Messungslinie in der Örtlichkeit wiederherzustellen oder die umgekehrte Aufgabe, eine neue Messungslinie in den Plan einzupassen, führt Verf. auf die Bestimmung der ausgleichenden Geraden aus den gemessenen Koordinaten ihrer Punkte zurück. Kann angenommen werden, daß der Plan in jedem Punkte dieselbe Genauigkeit aufweist und ist es möglich, den Papierstand des Planes aus dem Gitternetz zu bestimmen, so ist das von Johannsen [Z. Vermessungswes., Stuttg. 69, 521—527 (1940)] angegebene rechnerische Verfahren anzuwenden. Die ausgleichende Gerade wird derart ermittelt, daß die Quadratsumme der senkrechten Abstände der Meßpunkte von der Geraden ein Minimum wird. Da die ausgleichende Gerade durch den Schwerpunkt der Meßpunkte gehen muß, wird zunächst dieser bestimmt und dann eine angenommene Näherungsgerade zur Erfüllung der Minimumbedingung in die endgültige Lage um den Schwerpunkt gedreht. Für die Ausgleichung der Abszissenwidersprüche werden die gemessenen Längen beibehalten und nur der Nullpunkt der Messungslinie um den Durchschnittswert der Abszissenwidersprüche verschoben. Ist der Plan aus einer Meßtisch- oder Tachymeteraufnahme angefertigt und verläuft die Messungslinie durch mehrere Aufnahmegebiete, so können bei der Ausgleichung der Abszissenwidersprüche nach dem strengen Verfahren wesentliche Spannungen entstehen. In diesem Falle wird man Anfangs- und Endpunkt der Messungslinie für sich festlegen und die Längendifferenzen verhältnismäßig verteilen. Liegt der Anfangspunkt der Messungslinie auf einer bereits ausgeglichenen Messungslinie, so wird darauf verzichtet, die Quadratsumme der senkrechten Abstände zu einem Minimum zu machen. Die ausgleichende Gerade verläuft dann durch den Anfangspunkt der Messungslinie und durch den Schwerpunkt der Meßpunkte. Da der Anfangspunkt der Abszissen ebenfalls festliegt, werden nur die Abszissenwidersprüche verhältnismäßig verteilt. In diesem Fall ändern sich also ebenfalls die Längen durch die Ausgleichung. Das strenge Verfahren kann allgemein nur angewandt werden, wenn alle eingangs erwähnten Voraussetzungen vorliegen. Ist der Papierstand nicht zu ermitteln, so bleibt es bei der verhältnismäßigen Verteilung der Abszissen- und Ordinatenwidersprüche. Die praktische Anwendung der genannten Verfahren wird an mehreren Beispielen gezeigt. Dabei werden grobe Meßfehler leicht aufgefunden und beseitigt.

H. Schmehl (Potsdam).

Grabert, Gerhard: Winkelfehler am 90°-Dachkantprisma, ein Anwendungsbeispiel für vektorielle Durchrechnung. Z. Instrumentenkde. 62, 145—149 (1942).

Verf. gibt zunächst das Brechungs- und Spiegelungsgesetz in vektorieller Form und wendet das zweite sodann auf das Dachkantprisma an. — Die beiden Dachebenen mögen mit der Hypotenusenfläche des rechtwinkligen Prismas, auf das sie aufgesetzt sind, den Winkel φ (statt 45°), miteinander also den Winkel $2\varphi = 90^\circ - \Delta\beta$ (statt 90°) bilden. Das Koordinatensystem wird so bestimmt, daß die beiden Grundflächen (Kathetenflächen) als YZ - und XY -Ebene erscheinen. Ein durch die erste Grundfläche (E_1) hindurchgegangener Strahl habe den Strahlvektor (Einheitsvektor) $\vec{s}'_1 = \vec{s}_2 = (s_{2x}, s_{2y}, s_{2z})$; s_{2x}, s_{2y}, s_{2z} sind die Richtungskosinus gegen die Achsen ($s_{2x}^2 + s_{2y}^2 + s_{2z}^2 = 1$). Der Strahl wird nun an den beiden Dachflächen (E_2, E_3) zurückgeworfen, und zwar entweder in der Reihenfolge $E_2 \rightarrow E_3$ oder $E_3 \rightarrow E_2$; die Strahlvektoren seien nachher \vec{s}'_3 und \vec{s}'_2 , der Winkel $\widehat{\vec{s}'_3 \vec{s}'_2}$ ist ein Maß für den Abstand der beiden Bilder, für $\varphi = 45$ ist er 0. Die Formeln (10) und (11) für \vec{s}'_3 und \vec{s}'_2 lassen sich etwas vereinfacht schreiben:

$$\vec{s}'_3; \vec{s}'_2 = \left\{ \cos^2 2\varphi s_{2x} \mp \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 4\varphi s_{2y} - \sin^2 2\varphi s_{2z}; \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 4\varphi s_{2x} + \cos 4\varphi s_{2y} \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 4\varphi s_{2z}; \right. \\ \left. - \sin^2 2\varphi s_{2x} \mp \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 4\varphi s_{2y} + \cos^2 2\varphi s_{2z} \right\}.$$

Für den Winkel leitet Verf. ab [(12) und (13)]:

$$\cos \widehat{\vec{s}'_3 \vec{s}'_2} = \frac{1}{2}(1 - \cos 8\varphi)(s_{2x}^2 + s_{2z}^2) + (\cos 8\varphi - 1)s_{2x}s_{2z} + \cos 8\varphi \\ = \frac{1}{2}(1 - \cos 4\Delta\beta)(s_{2x}^2 + s_{2z}^2) + (\cos 4\Delta\beta - 1)s_{2x}s_{2z} + \cos 4\Delta\beta.$$

Für ein Parallelstrahlenbündel, das senkrecht auf E_1 auffällt und daher ungebrochen durchgeht, ist $s_{2x} = 1, s_{2y} = s_{2z} = 0$; hier wird $\cos \widehat{\vec{s}'_3 \vec{s}'_2} = \cos^2 2\Delta\beta$; oder für kleine $\Delta\beta$ näherungsweise $\sin \widehat{\vec{s}'_3 \vec{s}'_2} \sim \sqrt{2} \sin 2\Delta\beta$; $\vec{s}'_3 \vec{s}'_2 \sim 2\sqrt{2} \Delta\beta \sim 2,8 \Delta\beta$. Nach dem Durchgang durch die letzte Grundfläche (E_4) kann man annehmen $\vec{s}'_4 \vec{s}'_4 \sim 2,8 n \Delta\beta$; für $n = 1,5$ also $\vec{s}'_4 \vec{s}'_4 \sim 4,2 \Delta\beta$, was allgemein als Faustregel gelten kann. Boegehold.

Topologie:

Merz, Karl: Kreuzhaube erweitert nach Boy. (121. Jahresvers. Basel, Sitzg. v. 6.—8. IX. 1941.) Verh. Schweiz. naturforsch. Ges. 80—82 (1941).

Durch Erweiterung des Kreuzhauben-netzes (vgl. Verf., dies. Zbl. 24, 359) bekommt man ein Modell der projektiven Ebene, bei dem die Doppelstrecken, die zugleich Wendestrecken sind, ein Dreieck bilden. *Künnet* (Erlangen).

Adkisson, V. W., and Saunders MacLane: Extending maps of plane Peano continua. Duke math. J. 6, 216—228 (1940).

Für die Fortsetzbarkeit einer topologischen Abbildung T eines lokal zusammenhängenden Kontinuums K einer Sphäre S auf ein ebensolches Kontinuum K' einer Sphäre S' zu einer topologischen Abbildung von S auf S' war bisher nur eine notwendige und hinreichende Bedingung bekannt, die mit nicht-inneren Eigenschaften von K arbeitet [H. M. Gehman, Trans. Amer. Math. Soc. 28, 252—265 (1926); V. W. Adkisson, C. R. Soc. Sci. Varsovie 27, 5—9 (1934); dies. Zbl. 11, 38]. Verff. geben eine Bedingung an, die nur innere Eigenschaften von K benutzt. Ein Dreiein ist ein Tripel (a, b, c) von Bogen, die einen gemeinsamen Endpunkt haben und sonst paarweise fremd sind; zwei Dreieine (a, b, c) und (a', b', c') in S heißen gleich- bzw. gegensinnig, wenn die durch die Reihenfolge a, b, c induzierte Orientierung von S gleich bzw. entgegengesetzt ist der Orientierung von S , die durch die Reihenfolge a', b', c' induziert wird. Die neue Bedingung lautet nun: T führt je zwei gleich- bzw. gegensinnige Dreieine in ebensolche über. *Nöbeling* (Erlangen).

Nöbeling, Georg: Über die topologische Struktur der rektifizierbaren Kontinua. J. reine angew. Math. 184, 91—115 (1942).

Die rektifizierbaren Kontinua bilden keine topologische Klasse für sich, da es untereinander homöomorphe Kontinua gibt, von denen das eine rektifizierbar, das andere aber nicht rektifizierbar ist. Um die rektifizierbaren Kontinua trotzdem topologisch kennzeichnen zu können, stellt Verf. das Problem, die Kontinua, welche zu einem rektifizierbaren euklidischen Kontinuum homöomorph sind, zu charakterisieren, und beweist den Satz, daß die folgenden drei Bedingungen äquivalent sind: \mathfrak{B}_1 : Ein Kontinuum zu sein, das zu einem rektifizierbaren euklidischen Kontinuum homöomorph ist. \mathfrak{B}_2 : Eine reguläre Kurve K zu sein (im Mengerschen Sinn) mit der Eigenschaft, daß es zu je zwei Punkten p und q von K eine natürliche Zahl n gibt, so daß p und q durch höchstens n Teilbogen von K verbunden werden können, die zu je zweien höchstens abzählbar viele Punkte gemein haben. \mathfrak{B}_3 : Ein Kontinuum K zu sein, so daß es zu je zwei abgeschlossenen Teilmengen A und B von K endlich viele unabzählbare Mengen M_1, M_2, \dots, M_m aus $K - (A + B)$ gibt mit der Eigenschaft, daß bei jeder Auswahl eines Punktes p_k aus der Menge M_k ($k = 1, 2, \dots, m$) die Menge $(p_1) + (p_2) + \dots + (p_m)$ die Mengen A und B in K trennt. — Aus \mathfrak{B}_2 ist insbesondere ersichtlich, daß ein zu einem rektifizierbaren euklidischen Kontinuum homöomorphes Kontinuum nicht notwendig eine abzählbare Bogensumme sein muß, da jeder Baum offenbar die Eigenschaft \mathfrak{B}_2 und folglich auch die Eigenschaft \mathfrak{B}_1 besitzt, während bekanntlich die Bäume, in welchen die Endpunkte dicht liegen, keine abzählbaren Bogensummen sind. *G. Alexits* (Budapest).

Wallace, A. D.: Monotone coverings and monotone transformations. Duke math. J. 6, 31—37 (1940).

Man vergleiche die Arbeit von H. Hopf, „Freie Überdeckungen und freie Abbildungen“ [Fundam. Math. 28, 33—57 (1937); dies. Zbl. 15, 276]. Eine eindeutige stetige Abbildung heißt monoton, wenn das Urbild jedes Bildpunktes zusammenhängend ist. Eine Überdeckung A einer Menge M eines kompakten metrischen Raumes durch endlich viele, abgeschlossene Mengen M_1, \dots, M_h (nur solche A werden betrachtet) heißt monoton, wenn die Mengen M_i zusammenhängend sind. Ordnet man jedem M_i einen abstrakten Punkt p_i zu und spannen p_1, \dots, p_i ein $(j - 1)$ -dimen-

sionales abstraktes Simplex auf, wenn $M_{i_1} \cdots M_{i_j} \neq 0$ ist, so ist der so entstehende abstrakte Komplex der Nerv von A . Auf diesen Nerv beziehen sich: Dimension von A , A ist azyklisch usw. Verf. beweist: 1. Damit ein lokal zusammenhängendes Kontinuum nicht unikohärent sei, ist notwendig und hinreichend, daß es eine eindimensionale, monotone, nicht azyklische Überdeckung zuläßt. 2. Kein Kontinuum gestattet eine freie, monotone Abbildung in einen Baum (d. h. ein lokal zusammenhängendes Kontinuum ohne einfach geschlossene Teilkurve). 3. Wenn ein kompakter, metrischer Raum eine freie Abbildung in eine höchstens k -dimensionale Menge gestattet, dann auch eine freie, monotone Abbildung in eine solche Menge. 4. Ein lokal zusammenhängendes Kontinuum erlaubt eine freie, monotone Abbildung in eine höchstens k -dimensionale Menge dann und nur dann, wenn sie eine freie, monotone, höchstens k -dimensionale Überdeckung gestattet. 5. Damit ein lokal zusammenhängendes Kontinuum unikohärent sei, ist jede der beiden folgenden Bedingungen notwendig und hinreichend: jedes eindimensionale monotone Bild ist azyklisch; jede eindimensionale monotone Überdeckung ist azyklisch. 6. Ist A ein unikohärentes, lokal zusammenhängendes Kontinuum und $T(A) = B$ eine innere Abbildung, so ist auch B unikohärent.

Nöbeling (Erlangen).

Vance, E. P.: Generalizations of non-alternating and non-separating transformations. Duke math. J. 6, 66—79 (1940).

Zur Definition der im Titel genannten Begriffe vgl. dies. Zbl. 9, 88 und 15, 419. Verf. untersucht eindeutige, stetige Abbildungen $T(A) = B$ eines kompakten, metrischen Raumes A auf einen ebensolchen B , wenn sie 1. schwach nicht-alternierend, 2. schwach nicht-zerlegend, 3. schwach vollständig nicht-alternierend oder 4. schwach vollständig nicht-zerlegend ist. Diese Begriffe definiert er folgendermaßen: 1. für je zwei Punkte x und y von B trennt das Urbild $T^{-1}(x)$ von x keine zwei Punkte von $T^{-1}(y)$ eigentlich in A [$K \subset A$ trennt $H \subset A$ eigentlich in A , wenn K die Menge H in A trennt (d. h. es existiert eine Darstellung $A - K = A_1 + A_2$ mit in A offenen A_1 und A_2 , für welche $A_1 \cdot H \neq 0 \neq A_2 \cdot H$), aber kein Punkt von K die Menge H in A trennt]; 2. für jeden Punkt x von B trennt $T^{-1}(x)$ keine zwei Punkte von A eigentlich in A ; 3. für je zwei Punkte x und y von B und jede abgeschlossene Teilmenge K von $T^{-1}(x)$ trennt K keine zwei Punkte von $T^{-1}(y)$ eigentlich in A ; 4. für jeden Punkt x von B und jede abgeschlossene Teilmenge K von $T^{-1}(x)$ trennt K keine zwei Punkte von A eigentlich in A .

Nöbeling (Erlangen).

Klassische theoretische Physik.

● Janet, Maurice: Équations intégrales et applications à certains problèmes de la physique mathématique. Mém. Sci. math. Fasc. 101/102, 151 pag. (1941).

Die Schrift ist ein Lehrbuch der klassischen Theorie der Integralgleichungen. Sie ist aus Vorlesungen des Verf. hervorgegangen, bei denen nur Differential- und Integralrechnung vorausgesetzt wird, und hat den Charakter dieser Vorlesungen beibehalten. Dementsprechend werden die weiteren für die Integralgleichungen gebrauchten Hilfsmittel wie quadratische Formen, Randwertaufgaben und Greensche Funktion, orthogonale Funktionensysteme, Funktionenfolgen und gleichgradige Stetigkeit ausführlich hergeleitet. — Es folgen die Fredholmsche Theorie der Integralgleichungen, Gleichungen mit symmetrischem Kern, Existenz eines Eigenwertes, Festlegung der Eigenwerte als Extrema und nach dem Courantschen Maximum-Minimum-Prinzip, Entwicklung dem Kern erreichbarer Funktionen nach den Eigenfunktionen, Anwendung auf die Differentialgleichung $[p(x)y']' + q(x)y' + \lambda \rho(x)y = 0$ (Anzahl der Nullstellen, asymptotische Formeln für die Eigenwerte usw.) und auf 3 Seiten einige Bemerkungen über singuläre Integralgleichungen und den Fall mehrerer unabhängiger Veränderlicher. Physikalische Anwendungen (z. B. schwingende Saite) werden nur kurz gestreift.

Collatz (Karlsruhe).

● **Raethjen, Paul:** Einführung in die Physik der Atmosphäre. Bd. 1. (Hamburg. math. Einzelschriften H. 31.) Leipzig u. Berlin: B. G. Teubner 1942. XII, 126 S. u. 1 Taf. geb. RM. 8.—.

Mechanik:

Dungen, F.-H. van den: Sur les équations aux dérivées partielles du second ordre associées aux mouvements de la mécanique classique. Bull. Acad. Roy. Belg., V. s. 27, 279—287 (1941).

Si considera un sistema meccanico, olonomo, a n gradi di libertà, soggetto a forze conservative e si osserva che le corrispondenti $2n$ equazioni Hamiltoniane nelle coordinate del sistema q_1, q_2, \dots, q_n e loro coniugate p_1, p_2, \dots, p_n possono prolungarsi ponendo $q_{n+1} = S, p_{n+1} = \frac{\partial S}{\partial t}$, essendo S l'azione Hamiltoniana. Ciò permette di costruire una equazione a derivate parziali del secondo ordine nella incognita u funzione di q_1, q_2, \dots, q_n, S e del tempo t le cui caratteristiche soddisfano all'equazione di Hamilton-Jacobi del sistema meccanico dato. Dalla equazione in u (che è del tipo delle equazioni di propagazione) si deduce facilmente quella di Schrödinger. — Si dimostra poi che i punti rappresentativi, nello spazio delle q_1, q_2, \dots, q_n, S , delle ∞^n posizioni del sistema all'istante t , corrispondenti a dati valori iniziali delle coordinate ed a un arbitrario valore S_0 di S , si trovano su una superficie equifase per u , con fase indipendente dal tempo. Viene esposta anche una nuova interpretazione del teorema di Jacobi e cioè si prova che il punto rappresentativo del sistema è, in ogni istante, l'intersezione di una famiglia di superfici equifasi. — Si conclude che, con l'introduzione dell'azione hamiltoniana come nuova variabile, molte proprietà della meccanica ondulatoria possono ritrovarsi in modo esatto (e non approssimato) nella meccanica classica.

Dario Graffi (Bologna).

Marchetti, Luigi: Riduzione alla forma canonica delle equazioni del moto di sistemi anolonomi. Ann. Scuola norm. super. Pisa, II. s. 10, 199—208 (1941).

Soit S un système dynamique dépendant de n coordonnées lagrangiennes q_h , qui est en outre assujetti à k liaisons non-holonomes de la forme $\sum a_{rv} dq_r + a_v dt = 0$ ($v = 1, 2, \dots, k$). En admettant que les forces données dérivent d'un potentiel U , si l'on pose $L = T + U, Q_r^* = \sum_{i=1}^k \lambda_i a_{ri}$, la transformation classique de Poisson $p_h = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h}$ conduit à remplacer les équations généralisées de Lagrange, régissant le mouvement de S , par le système

$$(1) \quad \frac{dp_r}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_r} + Q_r^*, \quad \frac{dq_r}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_r} \quad (r = 1, 2, \dots, n)$$

où $H(p, q, t) = \sum p_r \dot{q}_r - L$. Considérant le pfaffien dont (1) est l'associé, l'auteur donne les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une transformation $P_r = P_r(p, q, t), Q_r = Q_r(p, q, t), T = T(p, q, t)$ réduise le système (1) à la forme canonique

$$\frac{dP_r}{dt} = -\frac{\partial K}{\partial Q_r}, \quad \frac{dQ_r}{dt} = \frac{\partial K}{\partial P_r}, \quad (r = 1, 2, \dots, n)$$

$K(P, Q, T)$ étant une fonction donnée. Des cas particuliers sont ensuite examinés.

C. Jacob (Bucarest).

Cattaneo, Carlo: Alcuni teoremi di minimo in dinamica e in cinetostatica. Rend. Mat., Univ. Roma, V. s. 2, 321—335 (1941).

Si considera un sistema S , di N punti materiali, soggetto a r vincoli bilaterali e privi di attrito e un secondo sistema S' ottenuto da S sopprimendo s degli r vincoli. All'istante t_0 vengono supposte identiche le posizioni e le velocità dei due sistemi e pure identiche, in ogni istante, le forze attive che agiscono su essi. Siano M_n e M'_n i moti (moti naturali) che, sotto l'azione di quelle forze, compiono i due sistemi, sia invece M un moto generico del sistema S compatibile però con i vincoli. Detto allora

divario all'istante $t_0 + \tau$ fra M'_n e M l'espressione $G = \sum_1^N m_i |P_i Q_i^*|^2$ (dove m_i è la massa del punto i -esimo dei due sistemi P_i e Q_i^* la sua posizione all'istante $t_0 + \tau$ rispettivamente per effetto dei moti M e M'_n) si dimostra, generalizzando così un noto teorema di Gauss, che, per τ sufficientemente piccolo, G è minima quando il moto M coincide col naturale M_n . — Si prova poi che G vale, a meno di infinitesimi, la differenza dei divari fra M , M'_n e il moto del sistema ottenuto da S sopprimendo tutti i vincoli. Per il caso del moto spontaneo, si espone una interpretazione geometrica dei risultati ottenuti, estendendo il principio della direttissima dell'Hertz. Nell'ultima parte del lavoro, riferendosi al sistema S si dimostra che, fra tutte le reazioni che i vincoli possono esplicitare, quelle effettive, soddisfano ad un principio di minimo per una funzione che nel caso del moto incipiente può ridursi all'energia di accelerazione o, a meno di infinitesimi, all'energia cinetica e all'effetto cineto-dinamico. *Dario Graffi* (Bologna).

Coenen, P.A.: Über das immer ruhende Drehpendel im ungleichförmig rotierenden Raum. *Physica*, Haag 9, 50—52 (1942).

Richtigstellung eines Fehlers, der sich in dem Buche von R. W. Pohl, „Mechanik und Akustik“, 2. Aufl., bei der Ableitung der Abstimmbedingung für ein im drehenden Bezugssystem befindliches Pendel eingeschlichen hatte. Die Beweisführung des Verf. ist jedoch umständlich gegenüber der von Pohl selbst in der neuen Auflage seines Buches („Mechanik, Akustik und Wärmelehre“, 3. und 4. Aufl., Berlin 1941) gegebenen Ableitung.

K. Magnus (Darmstadt).

● **Kutterer, Richard Emil:** Ballistik. Einführung in die mathematischen und technisch-physikalischen Grundlagen. Mit einem Vorwort v. C. Cranz. (Wissenschaft. Einzeldarstell. a. d. Naturwiss. u. Techn. Hrsg. v. Wilhelm Westphal. Bd. 97.) Braunschweig: Friedr. Vieweg & Sohn 1942. VIII, 208 S. u. 81 Abb. RM. 11.50.

Auf kürzesten Raum, in manchmal knapp referierender Form einen klaren und — dem physikalisch und mathematisch hinreichend vorgebildeten Leser — auch leicht verständlichen Überblick über die grundlegenden theoretischen und experimentellen Ergebnisse und Probleme der äußeren und inneren Ballistik zu bieten, scheint mir die Zielsetzung und Stärke dieses Buches zu sein. Diese Zielsetzung bedingt die durch die Fülle des Stoffes nicht ganz leichte Auswahl und Behandlungsart, der der Verf. mit großem Geschick gerecht wird. Verf. verstand es im Rahmen umfassender Gesichtspunkte mannigfache neuzeitliche Ergebnisse und Fragen zur Geltung zu bringen, wenn auch naturgemäß ihre Behandlung im einzelnen nicht sehr ausführlich sein kann. — Nach einer kurzen Einführung über die Geschößbahn im luftleeren Raume und ihre praktische Anwendungsmöglichkeit für das Schießen im luftgefüllten Raum (S. 1 bis 13) wendet sich Verf. zur Behandlung der Hauptgleichung der äußeren Ballistik (Siacci-Fasella, J. de Jong, Veithen-Runge-Kutta, und das, insbesondere für die Bombenballistik so wertvolle graphische Verfahren von Cranz-Rothe S. 30 bis 46). Besondere Erwähnung verdienen die Ausführungen über den Luftwiderstand, die aus Gründen der organischen Entwicklung des Stoffes getrennt behandelt werden (Allgemeines über den Luftwiderstand [S. 13 bis 30], und: Anwendung der Gasdynamik auf Probleme der Ballistik [S. 93 bis 118]). Über die Geschößstreuung und den Einfluß der Geschößrotation auf den Geschößflug (S. 46 bis 59) schließt Verf. die äußere Ballistik mit der Behandlung der Messung außenballistischer Größen ab (S. 59 bis 93). — Der zweite Teil des Buches ist den Fragen der inneren Ballistik gewidmet. Nach Darlegung der Grundbegriffe werden Verbrennungsgesetze (Vieille, Charbonnier) erörtert, woran sich die Hauptgleichung der inneren Ballistik, die Bewegungsgleichungen des Geschosses im Rohr und die Integration des innenballistischen Gleichungssystems nach Charbonnier und Cranz anschließen (S. 118 bis 160). Die Messung innenballistischer Größen (S. 160 bis 180), nebst einigem über Rohrabnutzung und die Druckunterschiede im Verbrennungsraum (S. 180 bis 191) beschließen das Buch.

v. Borbély (Kolozsvár).

Elastizität, Akustik:

Zener, Clarence: The intrinsic inelasticity of large plates. *Phys. Rev.*, II. s. 59, 669—673 (1941).

Unter Zugrundelegung der üblichen Näherungstheorie für dünne Platten wird das Verhalten großer Platten bei Einwirkung einzelner, normal angreifender Stoßkräfte untersucht. Die Angriffsdauer dieser Kräfte sei so kurz bemessen, daß die vom Rand zurückgeworfenen Wellen vernachlässigt werden dürfen. Die totale Verrückung erweist sich dann proportional dem Impuls. Die Betrachtungen werden auf das Problem des Aufprallens elastischer Kugeln auf große, dünne Platten angewandt. Die Ergebnisse stehen in guter Übereinstimmung mit früheren Untersuchungen von Raman [*Phys. Rev.* 15, 277 (1920)]. Garten (Leipzig).

Kimmel, A., und M. Läßle: Erweiterung des Verfahrens von Holzer-Tolle auf die Berechnung von Dreieigenschwingungszahlen nach Torsion zweiter Art. *Ing.-Arch.* 12, 320—325 (1941).

Das nach H. Holzer und M. Tolle benannte Verfahren zur Ermittlung der Eigenfrequenzen eines drehschwingungsfähigen Systems gehört zu den Verfahren, die Eigenfrequenzen durch systematisches Probieren ermitteln. Es wird ein geschätzter Wert der Eigenfrequenz in das System von homogenen algebraischen Gleichungen eingeführt und aus der letzten Gleichung ein „Restmoment“ errechnet. Wenn das Restmoment verschwindet, ist der angenommene Wert ein Eigenwert. — In seiner üblichen Form ist das Verfahren zugeschnitten auf drehschwingungsfähige Systeme, die aus glatten Wellenstücken mit aufgesetzten Scheiben bestehen, also nur „Haupttorsionen“ erfahren. Die Verf. erweitern das Verfahren nun, indem sie zeigen, wie man vorzugehen hat, wenn die Wellenstücke auch „Nebentorsionen“ erleiden, wenn die elastischen Gleichungen also nicht mehr die Gestalt $\vartheta_k - \vartheta_{k+1} = h_{kk} D_k$ sondern

$$\vartheta_k - \vartheta_{k+1} = \frac{h_{k,k-1}}{r} D_{k-1} + \frac{h_{kk}}{r} D_k + \frac{h_{k,k+1}}{r} D_{k+1}$$

haben. — Die praktische Durchführung dieses erweiterten Verfahrens erfordert im wesentlichen den gleichen Aufwand wie zuvor. K. Klotter (Berlin-Charlottenburg).

Hydrodynamik:

Tollmien, W.: Ergänzung zur Theorie der Grenzlinien adiabatischer Potentialströmungen. *Z. angew. Math. Mech.* 21, 308 (1941).

Ergänzung und Berichtigung zu der in dies. Zbl. 26, 27 besprochenen Arbeit. Grell (Augsburg).

Jacob, Caius: Sur quelques propriétés de la correspondance de M. Tchaplignine en dynamique des fluides compressibles. *Bull. Math. Soc. Roum. Sci.* 42, Nr 1, 19—31 (1941).

Durch eine von Tschapliguine gefundene Transformation läßt sich der stationären rotationsfreien ebenen Gasströmung mit $\kappa = \frac{c_p}{c_v} = -1$ eine Flüssigkeitsströmung zuordnen, so daß in entsprechenden Punkten das komplexe Potential den gleichen Wert hat und die Geschwindigkeitsvektoren mit der x -Achse den gleichen Winkel einschließen. Ihre Beträge sind durch eine vom Potential und der Stromfunktion unabhängige Beziehung verknüpft. Der Verf. setzt nun umgekehrt eine solche Zuordnung voraus und fragt nach den Strömungen, die diese gestatten. Außer zwei Sonderfällen, der kompressiblen Strömung eines Wirbels und einer Quelle, denen sich bei beliebiger Druck-Dichte-Beziehung Flüssigkeitsströmungen zuordnen lassen, findet er nur die Tschapliguineschen Strömungen mit $\kappa = -1$. — Weiter wird gezeigt, daß die kinetische Energie in zugeordneten Flächenelementen und der Fluß durch entsprechende Bogenelemente bei der kompressiblen und der inkompressiblen Strömung gleich sind. Es werden Beziehungen für die Krümmung in entsprechenden Punkten

der Strom- bzw. Potentiallinien ermittelt und Ungleichungen für die Bogenlänge entsprechender Kurven angegeben. Zum Schluß werden die Ergebnisse auf zwei Gasströmungen erweitert, deren zugeordnete inkompressible Strömungen durch eine konforme Abbildung auseinander hervorgehen. *A. Busemann* (Braunschweig).

Behrbohm, H., und M. Pinl: Zur Theorie der kompressiblen Potentialströmungen. 1. Neue Linearisierung der Grundgleichung der ebenen adiabatisch kompressiblen Potentialströmung. *Z. angew. Math. Mech.* **21**, 193—203 (1941).

Die zwischen der Eulerschen Differentialgleichung der Minimalflächen und der Differentialgleichung der stationären ebenen kompressiblen adiabatischen Gasströmung bestehende Analogie wird in der vorliegenden Arbeit hinsichtlich der Linearisierung durch eine Minkowskische Stützfunktion fortentwickelt. Genügt das von den beiden Ortsveränderlichen abhängige Geschwindigkeitspotential $z(x, y)$ der nichtlinearen Differentialgleichung

$$(1) \quad \frac{\partial}{\partial x} \frac{p}{\sqrt{\lambda + \mu(p^2 + q^2)}} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{q}{\sqrt{\lambda + \mu(p^2 + q^2)}} = 0 \quad \text{mit} \quad \lambda = a_0^2 + \frac{\kappa - 1}{2} w_0^2$$

(a_0, w_0 Anfangswerte von Schallgeschwindigkeit und Geschwindigkeit) und $\mu = \frac{1 - \kappa}{2}$,

wobei κ den adiabatischen Exponenten bedeutet, so gibt es eine von drei durch eine Beziehung gekoppelten Veränderlichen α, β, γ abhängige Funktion $\omega(\alpha, \beta, \gamma)$, die die Bedingung $\bar{x} = (x, y, z) = \text{grad } \omega$ erfüllt und der linearen Differentialgleichung

$$(2) \quad \omega_{\alpha\alpha} + \omega_{\beta\beta} + \frac{1}{C(\alpha, \beta, \gamma)} \omega_{\gamma\gamma} = 0 \quad \text{mit} \quad C(\alpha, \beta, \gamma) = \lambda + (\mu - 1) \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\gamma^2}$$

genügt; diese Differentialgleichung für ω ist für die Maximalgeschwindigkeit vom parabolischen, unterhalb vom elliptischen, darüber vom hyperbolischen Typus. Die Grundgleichung (1) ist äquivalent mit den Integrabilitätsbedingungen eines partiellen Differentialsystems erster Ordnung für Funktionen $\bar{x}(x, y), \bar{y}(x, y), \bar{z}(x, y)$, für die der Vektor $\bar{x} = (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \text{grad } \bar{\omega}$ Gradient einer Funktion $\bar{\omega}(\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma})$ ist, die ihrerseits einer zu (2) ähnlichen Differentialgleichung genügt. Deutet man im Anschluß an eine frühere Arbeit des Verf. (dies. Zbl. **25**, 276) (1) als Eulersche Gleichung eines Variationsproblems, so ergibt sich $\omega(\alpha, \beta, \gamma)$ eben als verallgemeinerte Minkowskische Stützfunktion, während die quergestrichenen Funktionen die jeweils entsprechenden des adjungierten Variationsproblems sind. Die Diskussion singulärer Lösungen und der Charakteristiken und ihr Zusammenhang mit weiteren Begriffsbildungen (Riemannsche Metrik, Hadamardsche Grundlösung) wird kurz gestreift. *Grell.*

Jacob, Caius: Sur les mouvements lents des fluides parfaits compressibles. *Portugaliae Math.* **1**, 209—257 (1939).

Possio, Camillo: Sulla teoria del moto stazionario di un fluido pesante con superficie libera. *Ann. Mat. pura appl.*, IV. s. **20**, 313—329 (1941).

On sait que dans un fluide parfait, pesant, le champ des vitesses du mouvement permanent, dans l'hypothèse d'une perturbation infiniment petite, due à une distribution donnée de singularités (sources et doublets), présente une indétermination qu'on peut enlever, d'après Rayleigh, par l'introduction d'une force fictive de frottement de la forme $-\mu(V - V_0)$, suivie du passage à la limite pour $\mu = 0$. — Analysant la solution donnée au problème par Havelock (*Proc. roy. Soc. Lond.* **1932**, 339—348), l'auteur prouve qu'on peut y aboutir d'une façon plus naturelle, en considérant le mouvement permanent comme cas limite (pour $t \rightarrow \infty$) d'un autre, non permanent, qui a lieu à partir du repos. Les conditions initiales et aux limites déterminent alors le potentiel $\Phi(x, y, z, t)$ d'une façon univoque, par suite d'un théorème d'Hadamard. — L'auteur traite ensuite le cas où la perturbation infiniment petite est due à des singularités de pression, ainsi que le cas du mouvement bidimensionnel. *Caius Jacob* (Bucarest).

Kravtchenko, Julien: Sur un théorème de validité dans la théorie des sillages. Mém. Acad. Sci. Inst. France **63**, Nr 1, 1—10 (1941).

M. Boggio et M. Villat [J. de Math., VI. s. **10** (1914)] ont établi le théorème suivant: «Soit, dans un courant plan illimité, une paroi concave vers le courant; son sillage satisfait aux conditions de validité de M. Brillouin: la vitesse est maximum à l'infini aval; les lignes de jet sont donc convexes, ne se recoupent pas et ne recoupent pas l'obstacle.» L'A. prouve que ce théorème reste valable lorsque le courant est limité par une paroi plane ou deux parois planes parallèles. Sa démonstration utilise la solution indéterminée du problème du sillage qu'on doit à M. Villat. *J. Leray.*

Imai, Isao: On the flow of a compressible fluid past a circular cylinder. 2. Proc. phys.-math. Soc. Jap., III. s. **23**, 180—193 (1941).

Eine angenäherte Ermittlung des Geschwindigkeitspotentials φ einer wirbel-freien Unterschallströmung um einen Kreiszylinder kann nach dem Vorgang von O. Janzen [Physik. Z. **14**, 639 (1913)] und von Lord Rayleigh [Philos. Mag. (6) **32**, 1 (1916)] auf Grund des nach Potenzen der Machschen Zahl M der Grundströmung fortschreitenden Ansatzes $\varphi = \sum_{\nu=0}^{\infty} \varphi_{2\nu} \cdot M^{2\nu}$ derart geschehen, daß man mit φ_0 als

Potential der inkompressiblen Strömung die höheren (gleichfalls von M unabhängigen) Näherungen $\varphi_{2\nu}$ mit $\nu \geq 1$ schrittweise berechnet. Im Anschluß an eine frühere Arbeit [Proc. phys.-math. Soc. Jap., III. s. **20**, 636 (1938)] des Verf. wird hier die Näherung bis zur Bestimmung von φ_6 getrieben; die erhaltenen Resultate werden numerisch diskutiert und mit experimentellen Befunden von G. J. Taylor und C. F. Sharman [Proc. Roy. Soc. London (A) **121**, 194 (1928)] verglichen, wobei die Übereinstimmung sich gegenüber den zuvor erreichten Näherungen als etwas verbessert erweist.

Harry Schmidt (Berlin).

Mohr, Ernst: Über den Navier-Stokeschen Spannungsansatz für zähe Flüssigkeitsströmungen. Luftf.-Forschg. **18**, 327—330 (1941).

Wenn man eine zähe Flüssigkeit zu einem materiellen Kontinuum idealisiert, so wird man in bekannter Weise zu einem symmetrischen Spannungstensor geführt. Die naheliegende Frage aufwerfend, ob dieses Ergebnis auch vom molekulartheoretischen Standpunkt aus verständlich erscheint, glaubt Verf. unter ausführlicherer Wiedergabe von bereits in anderem Zusammenhang (Sammelheft z. 113. Jahresber. d. Schles. Ges. f. vaterländ. Kultur **1941**, 85) mitgeteilten Erwägungen einem unsymmetrischen Spannungsansatz das Wort reden zu müssen; dies soll insbesondere aus dem Beispiel einer in einem kreiszylindrischen Gefäß befindlichen, nebst diesem Gefäß wie ein starrer Körper gleichmäßig rotierenden Flüssigkeit ersichtlich sein, für das als Auswirkung von Diffusionsvorgängen im Sinne der kinetischen Gastheorie eine von Null verschiedene Schubspannung errechnet wird. Dabei bleibt jedoch unbeachtet, daß die Molekülbewegung für ein mitrotierendes Bezugssystem unter dem Einfluß von Zentrifugal- und Corioliskraft erfolgt — ein Umstand, dessen Berücksichtigung nach einer von E. Fues [Z. Physik **118**, 409 (1941)] unter Bezugnahme auf die oben erwähnte Veröffentlichung des Verf. angestellten anschaulich-physikalischen Überlegung in Übereinstimmung mit der Kontinuumsmechanik die Schubspannungsfreiheit der starren Drehströmung ergibt.

Harry Schmidt (Berlin).

Bechert, Karl: Ebene Wellen in idealen Gasen mit Reibung und Wärmeleitung. (Inst. f. Theoret. Phys., Univ. Gießen.) Ann. Physik, V. F. **40**, 207—248 (1941).

Für die eindimensionale nichtstationäre Gasströmung werden unter der Annahme, daß der Wärmeleitkoeffizient λ und der Reibungskoeffizient μ konstant sind, spezielle Wellenvorgänge untersucht. Es werden für diesen Fall strenge partikuläre Lösungen angegeben, die zuweilen auch willkürliche Funktionen enthalten. Dabei erweist sich die Einführung von Lagrangeschen Koordinaten (vgl. dies. Zbl. **25**, 120) als nützlich. Die angegebenen Lösungen ergeben sich teilweise durch Ausnutzung von Ähnlichkeits-

transformationen, teilweise auch durch Zusatzforderungen, wie z. B. daß die Wärmeleitung oder Reibung keinen Einfluß haben soll bzw. die Strömung lokal oder substantiell stationär ist.

A. Busemann (Braunschweig)._o

Kravtchenko, Julien: Sur un principe de minimum dans l'hydrodynamique des fluides visqueux. C. R. Acad. Sci., Paris 213, 977—980 (1941).

Sei T ein von einer beschränkten geschlossenen Fläche S berandetes Raumgebiet derart, daß die Anwendbarkeit der Greenschen Formel auf den Bereich $T + S$ gesichert ist. Es wird eine stationäre Strömung einer zähen, homogenen und inkompressiblen Flüssigkeit (Dichte ρ , Reibungskoeffizient μ) unter folgenden Voraussetzungen betrachtet: 1. Die Bewegung sei eine „langsame“, d. h. die in den Navier-Stokesschen Differentialgleichungen auftretenden Trägheitsglieder dürfen vernachlässigt werden. 2. Die äußeren Massenkkräfte seien konservativ; ihr vorgegebenes Potential U sei eine auf $T + S$ eindeutige und stetige, daselbst zweimal — und nicht, wie in der Arbeit versehentlich angegeben, nur einmal — stetig nach ihren Argumenten x, y, z partiell differenzierbare Ortsfunktion. 3. Der Druck p und die Geschwindigkeitskomponenten v_x, v_y, v_z sollen auf T zweimal stetig partiell differenzierbar sein und beim Übergang auf S jeweils vorgegebene Werteverteilungen annehmen. Alsdann wird gezeigt, daß unter sämtlichen Funktionen, die den unter 3. angeführten Bedingungen sowie überdies der Kontinuitätsgleichung genügen, jedes Lösungssystem der gemäß 1. reduzierten hydrodynamischen Bewegungsgleichungen dadurch ausgezeichnet erscheint, daß es für die beiden Funktionale

$$I_1(p) = \int_{(T)} \left\{ \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial p}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial p}{\partial z} \right)^2 \right\} d\tau$$

bzw.

$$I_2(v_x, v_y, v_z) = \int_{(T)} \left\{ \mu \cdot \psi - v_x \cdot \frac{\partial}{\partial x} (\rho \cdot U - p) - v_y \cdot \frac{\partial}{\partial y} (\rho \cdot U - p) - v_z \cdot \frac{\partial}{\partial z} (\rho \cdot U - p) \right\} d\tau$$

mit

$$\psi = \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_y}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_z}{\partial z} \right)^2 + \frac{1}{2} \cdot \left\{ \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \right)^2 \right\}$$

einen stationären Wert gewährleistet.

Harry Schmidt (Berlin).

Høiland, Einar: On the stability of the circular vortex. Avh. Norske Vid. Akad. Oslo 1941, 1—24 (Nr 11).

Schon Lord Rayleigh hat Untersuchungen über die Stabilität des zirkularen Wirbels gegenüber achsensymmetrischen Störungen angestellt. Seine Ergebnisse für den Fall des inkompressiblen und homogenen Wirbels wurden später von H. Solberg und V. Bjerknes wiederentdeckt. Verf. hat in einer früheren Arbeit (Arch. Math. og Naturvid. 42, Nr. 5, 1) u. a. diese Untersuchungen auf den heterogenen inkompressiblen Wirbel ausgedehnt, worüber auch in der vorliegenden Arbeit kurz berichtet wird. Nunmehr leitet Verf. die Stabilitätsbedingung für den allgemeinen baroklinen, reibungslosen, zirkularen Wirbel her. Ausgangspunkt seiner Betrachtungen ist das Bjerknesche Kraftzirkulationstheorem (V. Bjerknes, Astrophys. Norvegica 2, 263), für welches Verf. in seiner obengenannten früheren Arbeit eine interessante Interpretation gegeben hatte. Er gewinnt zunächst die Frequenzgleichung für kleine achsensymmetrische oszillatorische Störungen des baroklinen zirkularen Wirbels im Felde konservativer Kräfte. Hieraus folgert er in Verallgemeinerung seiner früheren, für Volumbeständigkeit gültigen Überlegungen die Stabilitätsbedingung. Vereinfachungen treten im Falle der Barotropie ein. — Die Arbeit schließt ab mit einer qualitativen Diskussion der Stabilitätskriterien, wobei es Verf. darauf ankommt, die Neuartigkeit der stabilisierenden und destabilisierenden Effekte, die im allgemeinen baroklinen Fall entscheidend sind, herauszustellen.

Görtler (Göttingen)._o

Goldstein, Sydney: Three-dimensional vortex motion in a viscous fluid. Philos. Mag., VII. s. 30, 85—102 (1940).

Für das Studium der Turbulenz hatten Taylor und Green (Proc. Roy. Soc.

London A 1937) den zeitlichen Ablauf einer ganz speziellen Bewegung einer unendlichen inkompressiblen Flüssigkeit rechnerisch verfolgt. Die Geschwindigkeitskomponenten und der Druck wurden dabei als Potenzreihen in der Zeit dargestellt. Verf. vergleicht diese Ergebnisse nunmehr mit denjenigen, die sich für Reihenentwicklungen nach Potenzen Reynoldsscher Zahlen ergeben. *Garten* (Leipzig).

Riabouchinsky, Dimitri: Étude théorique et expérimentale des jets gazeux supersoniques. C. R. Acad. Sci., Paris 213, 424—428 (1941).

L'auteur a déjà obtenu, à l'aide de sa théorie des mouvements tridimensionnels presque rectilignes (ce Zbl. 22, 87), la solution avec ondes de choc du problème d'un jet gazeux de section presque carrée [C. R. Acad. Sci., Paris 208, 1765 (1939)]. — Dans la Note présente est examinée l'allure des lignes équipotentielles et de courant, pour des sections diagonales ou médianes, ainsi que le système d'ondes de choc.

C. Jacob (Bucarest).

Pretsch, J.: Über die Stabilität einer Laminarströmung in einem geraden Rohr mit kreisförmigem Querschnitt. Z. angew. Math. Mech. 21, 204—217 (1941).

Für die Untersuchung der Stabilität einer Laminarströmung durch ein kreiszylindrisches Rohr wird die grundlegende Störungsdifferentialgleichung 4. Ordnung hergeleitet. Die beiden reibungsbedingten Lösungen dieser Differentialgleichung sind identisch mit denjenigen des ebenen Problems. Auch die beiden reibungslosen Lösungen werden in ähnlicher Weise wie beim ebenen Problem gefunden und für einige symmetrische Grundströmungen explizit angegeben. Als Anwendung der Rechnungen wird gezeigt, daß die Hagen-Poiseuille-Strömung mit parabolischer Geschwindigkeitsverteilung durchaus stabil ist. Anwendung der Rechnungen auf die Stabilitätsuntersuchung der instationären Rohranlauf- und der stationären Rohreinlaufströmung wird in Aussicht gestellt.

H. Schlichting (Braunschweig).

Okaya, Tokiharu, and Misao Hasegawa: On the velocity distribution of flow behind the parallel rods. 1. (Physic. Inst., Fac. of Sci., Univ., Osaka.) Jap. J. Physics 14, 1—9 (1941).

Die Messungen und theoretischen Rechnungen von G. Cordes (Ing-Arch. 8, 245) über die turbulente Strömung hinter einem Stabgitter werden nochmals einer genauen Analyse unterzogen. Die von Cordes mit Hilfe des Prandtlschen Mischungswegansatzes errechnete Geschwindigkeitsverteilung wird im Ansatz um einige Glieder erweitert. Dadurch wird eine Übereinstimmung zwischen Messung und Rechnung auch noch für geringere Gitterabstände als bisher erzielt. *H. Schlichting* (Braunschweig).

Pfriem, H.: Zur Frage der oberen Grenze von Geschößgeschwindigkeiten. (Dtsch. Versuchsanst. f. Luftfahrt, Inst. f. Motorische Arbeitsverfahren u. Thermodyn., Berlin-Adlershof.) Z. techn. Physik 22, 255—260 (1941).

Diese Frage der Innenballistik wird als Anwendung früherer Überlegungen des Verf. (Forsch. Ingwes. 12, 51) mit Hilfe der nichtstationären Gasdynamik oder der Akustik großer Schwingungsweiten behandelt. Es ergibt sich für die höchste Geschößgeschwindigkeit im Grenzfall des masselosen Geschosses eine starke Abhängigkeit von der Höhe des atmosphärischen Luftdrucks.

A. Busemann (Braunschweig).

Riabouchinsky, Dimitri: Commentaires sur la théorie des ondes planes. C. R. Acad. Sci., Paris 213, 469—472 (1941).

Es handelt sich um einen kurzen Beitrag zur Bestimmung des Luftwiderstandes eines Geschosses bei Überschallgeschwindigkeit. Die hydraulische Analogie geradliniger Bewegungen einer zusammendrückbaren Flüssigkeit führte Lamb dazu, die Riemannschen Untersuchungen über ebene Wellen endlicher Amplitude, welche das Auftreten von Stoßwellen mit umfassen, auf das Problem langer Wellen in einem Kanal anzuwenden. Sein Ergebnis widerspricht jedoch der Erfahrung, während die Näherungslösung von Boussinesq, J. Mc. Cowan und Verf. zu solchen Ergebnissen führt, die in vollem Einklang mit der Erfahrung stehen. Verf. sucht in der vorliegenden Arbeit nach einer Erklärung für den grundlegenden Unterschied zwischen den Ergebnissen

der Riemann-Lambischen Theorie und den erwähnten, mit der Erfahrung übereinstimmenden Theorien. Die Riemannsche Lösung erscheint dabei als eine singuläre Lösung der Eulerschen Gleichungen. *Garten* (Leipzig).

Schallenkamp, A.: Flatterrechnung für Profile geringer Tiefe. Luftf.-Forschg. 19, 11—12 (1942).

Das Flattern von Profildrähten, Antennenmasten u. ä. unterscheidet sich vom Flügelflattern durch relativ große Amplituden und kleine reduzierte Frequenz. Unter der Annahme eines stationären Luftkraftgesetzes und großer Massenkoppelung ergibt sich, daß Flattern mit anliegender Strömung nur bei Schwerpunktsrücklage, mit abgerissener Strömung nur bei Schwerpunktsvorlage möglich ist. *Jordan* (Göttingen).

Cicala, Placido: Le teorie approssimate dell'ala oscillante di allungamento finito. Atti Accad. Sci. Torino 76, 389—416 (1941).

Verf. sucht seine Arbeit über den Einfluß der endlichen Flügelstreckung bei schwingenden Flügeln (Atti Accad. naz. Lincei, Rend. VI. s. 26, 97) gegenüber der Kritik von Sears [Proc. 5. internat. Congr. appl. Mech. 483 (1939)] und Küssner (Luftfahrtforschg. 17, 370) zu rechtfertigen. Es handelt sich im wesentlichen darum, ob man eine gewisse Größe K ohne weiteres gleich der Summe der gebundenen und freien Wirbel längs der Flügeltiefe setzen darf, wie es Verf. tut, oder ob man die Menge der Näherungsannahmen auf die qualitativen Annahmen großer Flügelstreckung und ebener Strömung an den einzelnen Flügelschnitten beschränkt und die Größe K entsprechend analytisch gewinnt. Verf. stellt die verschiedenen Näherungstheorien gegenüber und weist nach, daß ihre Ergebnisse sich voneinander unterscheiden.

H. G. Küssner (Göttingen).

Thermodynamik:

Faggiani, Dalberto: Trasmissione di calore in regime permanente e periodico nei tubi alettati. Ist. Lombardo, Rend., III. s. 74, 389—402 (1941).

Si calcola dapprima, mediante opportune ipotesi semplificatrici, la trasmissione del calore stazionaria in un tubo sottile con alette, supposta uniforme e, ovviamente, invariabile la temperatura del fluido interno e del fluido esterno. Le formule finali contengono le funzioni di Bessel, che però, possono essere sostituite, approssimativamente, da esponenziali, quando è lecito calcolare la trasmissione del calore nelle alette mediante l'equazione della sbarra. In quest'ultima ipotesi (generalmente accettabile nelle applicazioni) si studia poi la trasmissione del calore nello stesso tubo, quando la temperatura del fluido interno, supposta ancora uniforme, fluttua con legge sinoidale intorno ad un valore medio costante.

Dario Graffi (Bologna).

Elektrodynamik:

Fischer, J.: Stromverdrängung im zylindrischen Leiter, insbesondere von elliptischem Querschnitt. Physik. Z. 42, 327—336 (1941).

Verf. stellt zu Anfang seiner Arbeit die im Außenraum von Leitern stattfindenden Wellenvorgänge den im Leiterinneren verlaufenden Wechselströmen gegenüber und zeigt, wie im letzten Fall der Stromverlauf unter Zugrundelegung einer quasistationären Betrachtungsweise berechnet werden kann. Als besonderen Leiterquerschnitt betrachtet er zunächst das Rechteck und behandelt ausführlich die Arbeiten anderer Forscher über die Wechselstromverteilung im Innern eines solchen Leiterquerschnitts. Hierauf wendet er sich dem elliptischen Querschnitt zu und führt hierfür elliptische Koordinaten ein. Die partielle Differentialgleichung der Stromverteilung zerfällt in zwei gewöhnliche Differentialgleichungen vom Mathieuschen Typus, für deren mathematische Behandlung Verf. auf Arbeiten des Ref. verweist. Verf. schreibt die Lösungen für das elektromagnetische Feld innerhalb und außerhalb des Leiterquerschnitts in Form unendlicher Reihen an und bestimmt die konstanten Faktoren dieser Reihen aus den Randbedingungen am Leiterumfang, welche die Stetigkeit der elektrischen und der magnetischen tangential gerichteten Feldstärken fordern. Zur Berechnung

des komplexen Wechselstromwiderstandes macht Verf. vom Poyntingschen Satz in der komplexen Form Gebrauch, indem er den Energiefluß durch die Leiteroberfläche hindurch berechnet. Er gelangt zu einem Ausdruck für diesen Wechselstromwiderstand in Form einer unendlichen Reihe.

M. J. O. Strutt (Eindhoven).

Försterling, K.: Über die Ausbreitung elektromagnetischer Wellen in einem magnetisierten Medium bei senkrechter Inzidenz. Hochfrequenztechn. 59, 10—22 (1942).

Es werden die Maxwellgleichungen für den Fall gelöst, daß die elektrische Feldstärke und die dielektrische Verschiebung in tensoriell-komplexer Weise miteinander verknüpft sind, entsprechend der Wellenausbreitung in einem magnetisierten Medium. Im besonderen wird der Fall der Reflexion einer solchen Welle bei senkrechter Inzidenz an der Heaviside-Schicht, beschrieben durch eine z -Abhängigkeit der Tensorkomponenten der Dielektrizitätskonstante, untersucht. Entsprechend den beiden auch in einem homogenen magnetisierten Medium mit verschiedener Geschwindigkeit laufenden elliptisch polarisierten Wellen gibt es bei dieser Reflexion zwei elliptisch polarisierte Wellen.

Sauter (München).

Niessen, K. F.: Zur Frequenzstabilität einiger Resonatoren. Physica, Haag 8, 1077—1093 (1941).

Verf. betrachtet die Grundfrequenz eines hohlen metallischen Würfels und einer ebensolchen Hohlkugel für elektromagnetische Schwingungen. Er untersucht die Änderungen dieser Schwingungsfrequenzen erstens bei konstanten Abmessungen in einer Richtung sowie untereinander gleicher Verringerung der Abmessungen in den beiden anderen Richtungen. Die Formeln für die betreffende Eigenfrequenz werden früheren Arbeiten entnommen. Es zeigt sich, daß die Grundfrequenz der Kugel etwa achtmal stabiler ist als jene des Würfels bei gleicher relativer Änderung der Abmessungen. Zweitens wendet Verf. sich dem Fall zu, daß die Abmessungen in einer Richtung verringert und in den anderen Richtungen vergrößert werden, derart, daß die Gesamtoberfläche konstant bleibt. In diesem Falle erweist sich die Grundfrequenz des Würfels etwa 3,6fach stabiler als jene der Kugel. Verf. weist darauf hin, daß bei seinen Betrachtungen die Änderungen der Abmessungen so gewählt wurden, daß die Grundfrequenz des ursprünglichen Hohlraums in die Grundfrequenz des geänderten Hohlraums übergeht.

M. J. O. Strutt (Eindhoven).

Optik:

Jones, R. Clark: A new calculus for the treatment of optical systems. 1. Description and discussion of the calculus. J. opt. Soc. Amer. 31, 488—493 (1941).

Die Arbeit beschäftigt sich mit der theoretischen Behandlung der Wirkung solcher optischer Anordnungen, die die Polarisierung des hindurchgehenden Strahlenbündels ändern, sei es durch Ändern der Phase der Komponenten des Lichtes („Verzögerungsplatten“), sei es durch verschieden starke Absorption jener Komponenten (Polarisatoren) oder sei es endlich durch optische Aktivität (Drehen der Schwingungsrichtung des elektrischen Vektors des Lichtes) des Materials. Wird das einfallende Licht durch die Matrix $\mathcal{C}_0 \equiv \begin{pmatrix} E_{x0} \\ E_{y0} \end{pmatrix}$ der Komponenten $E_x = A_x \exp[i(\epsilon_x + 2\pi\nu t)]$, $E_y = A_y \exp[i(\epsilon_y + 2\pi\nu t)]$ des elektrischen Vektors, das hindurchgegangene Licht durch die Matrix $\mathcal{C} \equiv \begin{pmatrix} E_{x1} \\ E_{y1} \end{pmatrix}$ dargestellt, sind ferner x', y' die Richtungen der Hauptachsen der einwirkenden Platten, ω der Winkel der x' gegen die x -Achse, $n_{x'}$ und $n_{y'}$ die Hauptbrechungsindizes, $k_{x'}$ und $k_{y'}$ die Hauptextinktionskoeffizienten, d die Dicke der Platte, $N_{x'} = \exp[-i(2\pi d/\lambda)(n_{x'} - i k_{x'})]$, $N_{y'} = \exp[-i(2\pi d/\lambda)(n_{y'} - i k_{y'})]$, $N \equiv \begin{pmatrix} N_{x'} & 0 \\ 0 & N_{y'} \end{pmatrix}$, $S(\omega) \equiv \begin{pmatrix} \cos \omega & -\sin \omega \\ \sin \omega & \cos \omega \end{pmatrix}$, so gilt

$$\mathcal{C}_1 = S(\omega) N S(-\omega) \mathcal{C}_0 \equiv M \mathcal{C}_0.$$

Sind mehrere derartige optische Elemente hintereinander gestellt, deren Orientierungen

durch $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ gegeben sind, so gilt mit $M^{(n)} \equiv M_n M_{n-1} \dots M_2 M_1$ entsprechend $\mathcal{C}_n = M^{(n)} \mathcal{C}_0$. Der Verf. zeigt dann, daß sich $M^{(n)}$ darstellen läßt in der Form

$$M^{(n)} = S(\omega_1) [S(\omega_{1,n}) N_n S(\omega_{n,n-1}) \dots S(\omega_{2,1}) N_1] S(-\omega_1)$$

mit

$$\omega_{i,j} \equiv \omega_j - \omega_i.$$

Hierbei ist bisher die Wirkung eines drehenden Elementes, die durch die Matrix $S(\bar{\omega})$ dargestellt werden kann, wenn die Polarisationssebene um den Winkel $\bar{\omega}$ gedreht wird, noch nicht berücksichtigt. Befindet sich dies Element zwischen dem i -ten und dem $(i+1)$ -ten der vorher betrachteten Elemente, so ist in obiger Formel $\omega_{i+1,i} \equiv \omega_i - \omega_{i+1} + \bar{\omega}$ zu setzen. Der Verf. untersucht weiter die Wirkung bei Umkehr des Lichtes, wofür die Matrix $\bar{\mathcal{C}} \equiv (E_x E_y)$ eingeführt wird. Es wird darauf hingewiesen, daß sich hierbei die drehenden Elemente von den beiden anderen Arten, den Verzögerungsplatten und den Partialpolarisatoren dadurch unterscheiden, daß sich bei den drehenden Elementen das Vorzeichen der Drehung ändert, wenn sie in entgegengesetzter Richtung vom Licht durchsetzt werden. Vorausgesetzt ist hierbei, daß es sich nicht um solche drehenden Elemente handelt, wie sie durch den Faraday-Effekt dargestellt werden, da bei diesen die Richtung der Drehung nicht von der Fortpflanzungsrichtung des Lichtes, sondern von der Richtung des Magnetfeldes abhängt. Während in den übrigen Fällen $\bar{\mathcal{C}}_{\text{Austritt}} = \bar{\mathcal{C}}_{\text{Eintritt}}$ $M^{(n)}$ mit gleichem $M^{(n)}$ wie oben gilt, müssen in den Faraday-Effekt-Elementen die Vorzeichen der $\bar{\omega}$ geändert werden. — Der Verf. zeigt weiter, daß — falls das optische System keine Partialpolarisatoren enthält — alle Matrizen Einheitsmatrizen sind.

Picht (Neubabelsberg).

Hurwitz jr., Henry, and R. Clark Jones: A new calculus for the treatment of optical systems. 2. Proof of three general equivalence theorems. J. opt. Soc. Amer. 31, 493—499 (1941).

Im Anschluß an die in Teil I entwickelte Theorie (siehe vorstehenden Bericht) werden in dieser Arbeit drei allgemeine Äquivalenztheoreme bewiesen: 1. wird gezeigt, daß ein optisches System, das aus einer Anzahl von Phasenverzögerungsplatten und von optisch drehenden Platten besteht, für Licht einer gegebenen Wellenlänge optisch äquivalent ist einem System, das nur zwei Elemente, nämlich eine Phasenverzögerungsplatte und ein drehendes Element (Rotator), enthält; 2. wird gezeigt, daß ein optisches System, das aus einer Anzahl partieller Polarisatoren und aus drehenden Elementen besteht, für Licht einer gegebenen Wellenlänge optisch äquivalent ist einem System, das nur zwei Elemente enthält, nämlich einen partiellen Polarisator und einen Rotator; 3. wird gezeigt, daß ein optisches System, das eine Anzahl von Phasenverzögerungsplatten, partiellen Polarisatoren und Rotatoren enthält, für Licht einer gegebenen Wellenlänge optisch äquivalent ist, einem System, das nur vier Elemente enthält, nämlich 2 Phasenverzögerungsplatten, einen partiellen Polarisator und einen Rotator. Für eine große, aber endliche Klasse von Fällen dieser Art ist der Rotator in dem äquivalenten System nicht erforderlich. Die Verff. weisen noch darauf hin, daß das erste dieser drei Theoreme bereits durch H. Poincaré bewiesen wurde, aber auf einem ganz anderen Wege, den die Verff. in ihrer Arbeit gleichfalls mitteilen.

Picht.

Jones, R. Clark: A new calculus for the treatment of optical systems. 3. The Sohncke theory of optical activity. J. opt. Soc. Amer. 31, 500—503 (1941).

Von Reusch war experimentell gezeigt, daß ein optisches System, das aus einer großen Zahl n einander gleicher Phasenverzögerungsplatten besteht, von denen jede gegenüber der vorhergehenden um einen Winkel ω gedreht ist, derart, daß das Produkt $n \cdot \omega$ ein ganzes Vielfaches von π ist, annähernd äquivalent ist einem einzigen Rotator, vorausgesetzt, daß die Phasenverzögerung jeder einzelnen Platte klein ist. Die durch diese Anordnung bewirkte Drehung $\bar{\omega}$ der Polarisationssebene ist annähernd $\bar{\omega} = \frac{1}{8} n \Delta^2 \cotg \frac{\pi}{n}$, worin Δ die Phasenverzögerung jeder einzelnen Platte ist und als klein vorausgesetzt war. Die vorstehende Formel war von Pockels abgeleitet worden,

während durch Sohnke die theoretische Behandlung für ein aus drei Phasen-Verzögerungsplatten bestehendes System gegeben war, von denen jede gegen die vorhergehende um den Winkel von 60° gedreht war. Der Verf. behandelt im Anschluß an die in Teil I (siehe vorletzten Bericht) durchgeführten Überlegungen die Fragestellung völlig streng ohne die Einschränkung, daß die Phasenverzögerung jeder der Platten klein sein soll. Für diesen allgemeinen Fall kann das System ersetzt werden durch ein System, das nur einen Rotator und eine Phasenverzögerungsplatte enthält, wobei sowohl der Winkel der bewirkten optischen Drehung als auch der Betrag der bewirkten Phasenverzögerung vom Verf. bestimmt wird. Für kleine Werte der Phasenverzögerung jeder der Platten der optischen Anordnung ist die vom Verf. abgeleitete Formel mit der von Pockels gefundenen identisch. *Picht* (Neubabelsberg).

Schulz, H.: Beiträge zur geometrischen Optik. Z. Instrumentenkde 62, 119—122 (1942).

Der Verf. stellt sich die Aufgabe, die Bedingung anzugeben, der bei einem zerteiligen, achromatischen Objektiv mit verschwindenden Linsendicken die Brechzahlen n_1 und n_2 und die Abbeschen Zahlen ν_1 und ν_2 genügen müssen, damit die beiden mittleren Radien r_2 und r_3 einander gleich werden, so daß man die Linsen verkitten kann. Er faßt die Gleichungen so allgemein, daß die Dingweite s_1 beliebig ist, und daß die zweite Seidelsche Summe einen vorgeschriebenen Wert $S(2)$ hat. Für die Kehrwerte der Brennweiten besteht die Bedingung $F_1 + F_2 = 1$, für die Kehrwerte der beiden

ersten Halbmesser ist $R_2 = R_1 - \frac{F_1}{n_1 - 1}$. Mit Rücksicht auf $R_2 = R_3$ erscheint R_1 als Funktion von n_1, n_2, s_1, F_1 und $S(2)$. Andererseits gibt die Hebung des Öffnungsfehlers $S(1) = 0$ eine Gleichung zweiten Grades für R_1 , wo die Koeffizienten von n_1, n_2, s_1, F_1 abhängen. Durch Einsetzen erhält Schulz eine Gleichung zwischen n_1, n_2 und F_1 . In F_1 ist sie vom 5. Grade; Sch. gibt die Koeffizienten an — es sind ziemlich verwickelte Funktionen von $n_1, n_2, s_1, S(2)$ — und bemerkt, daß eine Lösung stets nicht nur reell, sondern auch brauchbar sei. Mit F_1 ist dann das Verhältnis der Abbeschen Zahlen bestimmt, es ist $\nu_1/\nu_2 = F_1/(F_1 - 1)$. — Andererseits kann man auch F_1 und etwa n_2 als gegeben betrachten und eine Gleichung für n_1 aufstellen. Bei $s_1 = \infty, S(2) = 0$ nimmt sie die Form an: $Gn_1^4 + Hn_1^3 + Kn_1^2 + Jn_1 + n_2F_1^2G = 0$; Sch. teilt auch die Ausdrücke für G, H, J, K mit und verweist auf Fälle, wo sie sich vereinfachen, insbesondere gibt er für $F_1 = 2$ eine Reihe von Wertepaaren n_1, n_2 an. Anscheinend sind in den Ausdrücken der Koeffizienten (S. 120 und 121) einige Druckfehler stehengeblieben; ich erhalte S. 120: $C' = (n_2 - n_1)^2(3n_1n_2 + 2n_1 - 2n_2)$; $E'' = -(n_2 - n_1)(n_1 - 1)(2n_2 - 1)$; S. 121:

$$J = n_2^2\varphi_1[n_2^2\{\varphi_1(\varphi_1 - 2)(\varphi_1 - 3) - 2\} + n_2(\varphi_1 - 1)(5\varphi_1^2 - 4\varphi_1 + 1) - \varphi_1(\varphi_1 - 1)(3\varphi_1^2 - 3\varphi_1 + 1)].$$

Sch. gibt zum Schluß an, wie man die allgemeine Gleichung (für s_1 endlich, $S(2) \geq 0$) benutzen könne, um Petzvalsche Objektive aus zwei verkitteten Linsenpaaren zu bestimmen; ich habe diese Auseinandersetzung nicht ganz verstanden, da es mir nicht gelungen ist, die Ausgangsgleichung (S. 122 oben) aus dem Berekischen Ansatz abzuleiten, auf den Sch. sich beruft.

Hans Boegehold (Jena).

Rosin, Seymour, and Orrin H. Clark: Combination of optical systems. J. opt. Soc. Amer. 31, 198—201 (1941).

Die Verff. leiten die bekannten Formeln zur Zusammensetzung zweier Linsenfolgen (s. z. B. im Czapskischen Lehrbuch, 3. Aufl., S. 59) aus den Brennweiten f_1, f'_1, f_2, f'_2 und dem Abstände F'_1F_2 neu ab. Sie verallgemeinern sie sodann auf n Folgen, das Ergebnis hat Determinantenform. Als Rechenbeispiel wird das Gullstrandsche Übersichtsauge gewählt. Die Formeln stehen fast in derselben Gestalt bei J. P. C. Southall, The principles and methods of geometrical optics, S. 257—262. New York 1910. *Boegehold*.

Thomescheit, Alfred: Zerlegung der Aberrationen meridionaler Strahlenbüschel bei optischen Systemen in Anteile der einzelnen Flächen und Bildfehlerarten auf Grund trigonometrischer Strahldurchrechnung. (*Askania-Werke A.-G., Berlin.*) Z. Instrumentenkde **62**, 105—119 (1942).

Für Linsenfolgen gibt die Berechnung der Seidelschen Summen die Wirkung jedes einzelnen Bildfehlers und jeder einzelnen Fläche, aber freilich nur für die Abweichungen niederster Ordnung. Die trigonometrische Durchrechnung gibt genaue Werte, läßt aber nicht ohne weiteres den Anteil der einzelnen Flächen, auch nicht immer die Wirkung der einzelnen Fehlerarten erkennen. M. Berek hat 1930 vorgeschlagen, daß man für den Wert der Abweichungen in der Gaußischen Bildebene der Gesamtfolge die Anteile der einzelnen Flächen bestimme, indem man nach Durchrechnung der Strahlen durch eine Reihe von Flächen für die übrigen Flächen gaußisch rechnet. Indem man die Durchrechnung für die erste Fläche, die ersten beiden Flächen usw. durchführt, erhält man den Anteil der ersten Fläche, der ersten beiden Flächen usw., Durchrechnung fingierter Strahlen läßt auch die einzelnen Fehlerarten unterscheiden. — Thomescheit zeigt die praktische Durchführung, namentlich für die letzte Aufgabe. Er setzt dann auseinander, daß man ähnlich auch die Anteile für die Längsabweichung bestimmen könne und verallgemeinert das Verfahren, indem er es auf die Farbenabweichung anwendet. Den Schluß des Aufsatzes bildet ein Beispiel. *Hans Boegehold (Jena).*

Geffeken, W.: Reflexion elektromagnetischer Wellen an einer inhomogenen Schicht. *Ann. Physik, V. F.* **40**, 385—392 (1941).

Der Anlaß zu der Arbeit waren Untersuchungen über die optische Änderung der Oberflächenschichten von Gläsern, die unter dem Einfluß von wässerigen Säuren standen. Die vorliegenden theor. Ausführungen sollten Rückschlüsse auf die Zusammensetzung dieser Schichten ermöglichen. Die praktischen Ergebnisse werden erst später veröffentlicht. Hier gibt der Verf. sein Verfahren zur Berechnung des Reflexionskoeffizienten einer senkrecht, auf eine nur in dieser Einfallrichtung (z -Richtung) inhomogene, planparallele Schicht (zwischen $z = 0$ und $z = z_1$), auffallenden Lichtwelle an, das ihm für die oben angegebenen Zwecke besonders geeignet erscheint. Er führt eine sog. „Reflex-Funktion“ $\tilde{R}(z)$ ein. Physikalisch bedeutet sie die Reflexion des zwischen $z = z_1$ und $z(0 < z < z_1)$ liegenden Schichtanteils. Für $\tilde{R}(z)$ ermittelt er eine Diffgl. 1. Ordnung, die bis auf ein Glied $\sim \tilde{R}^2(t)$ linear ist. Sie wird durch sukzessive Näherung gelöst. (Bei der nullten Näherung wird das quadratische Glied $= 0$ gesetzt, bei der ersten Näherung wird dann für $\tilde{R}^2(t)$ der Wert eingesetzt, der sich in nullter Näherung ergab.) Es werden einige Beispiele durchgerechnet. *F. Renner.*

Relativitätstheorie:

Costa de Beauregará, Olivier: Sur la mécanique analytique du point électriquement chargé. *C. R. Acad. Sci., Paris* **214**, 58—60 (1942).

Bemerkung über das Verhältnis der relativistischen Mechanik eines Massenpunktes zur Betrachtung einer Punktladung im elektromagnetischen Feld. *F. Hund.*

Lichnerowicz, André: Sur l'invariant intégral de l'hydrodynamique relativiste. *Ann. École norm., III. s.* **58**, 285—304 (1941).

Ein beliebiger Impuls-Energie-Tensor $T_{\alpha\beta}$ läßt sich immer schreiben $T_{\alpha\beta} = \rho u_\alpha u_\beta - \tau_{\alpha\beta}$, wo ρ ein Skalar > 0 , $u^\alpha = \frac{dx^\alpha}{ds}$ und $\tau_{\alpha\beta}$ irgendein symmetrischer Tensor ist. Die Erhaltungssätze $\nabla_\alpha(\rho u^\alpha u_\beta) = \nabla_\alpha \tau_\beta^\alpha$ bekommen durch die Einführung von $\nabla_\alpha \tau_\beta^\alpha = \rho J_\beta$ die Form

$$(\ast) \quad \begin{aligned} \nabla_\alpha(\rho u^\alpha) &= \rho J_\alpha u^\alpha, \\ u^\alpha \nabla_\alpha u_\beta &= J_\beta - J_\alpha u^\alpha u_\beta. \end{aligned}$$

Für den Spezialfall, daß sich J_β darstellen läßt als Potential $J_\beta = \nabla_\beta \log F$ („holonome Medien“) lassen sich einige Übertragungen von Sätzen der klassischen Hydrodynamik

auf (*) gewinnen. Das fundamentale Hilfsmittel ist der Satz: Die Zirkulation $\int F u_\alpha \delta x^\alpha$ längs einer geschlossenen Kurve C ist eine relative Integralinvariante des Systems (*) für die Stromlinien im Falle der Holonomie; sie behält also ihren Wert bei, wenn man jeden Punkt von C längs der durch ihn hindurchgehenden Stromlinie verschiebt. Wegen der zahlreichen Einzelheiten sei auf die Originalarbeit verwiesen. Einfache Spezialfälle ergeben sich für den Fall der Unabhängigkeit der $g_{\alpha\beta}$ und F von x^4 und für den Fall der Existenz einer Zustandsgleichung bei $\tau_{\alpha\beta} = p g_{\alpha\beta}$ (p ein skalarer Druck).

Heckmann (Hamburg-Bergedorf).

Lichnerowicz, André: Sur l'intégration des équations de la relativité. C. R. Acad. Sci., Paris **213**, 549—551 (1941).

L'aut. montre que la méthode d'intégration développée dans une note précédente (ce Zbl. **26**, 176) permet la détermination complète des mouvements irrotationnels d'un fluide homogène incompressible.

J. Haantjes (Amsterdam).

Atomphysik.

Kristallbau und fester Körper:

Corner, J., and J. E. Lennard-Jones: Critical and co-operative phenomena. 6. The neighbour distribution function in monatomic liquids and dense gases. Proc. roy. Soc., Lond. A **178**, 401—414 (1941).

Nimmt man an, daß in einatomigen Flüssigkeiten und dichten Gasen die Atome an bestimmte, regelmäßig angeordnete Ruhelagen durch reine Zentralkräfte gebunden sind, so kann man die Dichteverteilung in der Umgebung eines bestimmten herausgegriffenen Atoms in Abhängigkeit vom Gittertyp und von diesen Kräften bestimmen. Es werden verschiedene Ansätze für diese Kräfte durchgesprochen. Am einfachsten liegen die Verhältnisse bei elastischer Bindung an die Gleichgewichtslagen, in welchem Fall man zu Gaußschen Verteilungskurven in der Nähe der Dichtemaxima kommt. Komplizierter, wenn auch rein algebraisch, ist die Verteilungskurve, wenn man die Atome in kugelförmige Hohlräume mit starren Wänden eingeschlossen denkt. Schließlich wird für einen Kraftansatz von Lennard-Jones und Devonshire, der die v. d. Waals-Kräfte berücksichtigt, die Verteilung numerisch berechnet. — Unter bestimmten Voraussetzungen kann man aus der beobachteten Dichteverteilung rückwärts den Verlauf der Bindungskraft ermitteln.

Sauter (München).

Rüdiger, O., und H. Schlechtweg: Die Magnetostriktion des Eisens in hohen Magnetfeldern. Ann. Physik, V. F. **39**, 1—18 (1941).

Der Längseffekt der Magnetostriktion in Feldrichtung wird für beliebige Lage des Magnetfeldes gegenüber dem Kristall untersucht. Die Berechnung beschränkt sich auf das asymptotische Verhalten in hohen Magnetfeldern. Der Gleichgewichtszustand wird aus dem Minimum der Energie berechnet, die sich aus der äußeren Energie, der rein magnetischen Energie, der magnetoelastischen und der elastischen Energie zusammensetzt. Für den hieraus folgenden Zusammenhang zwischen Feld- und Magnetisierungsrichtung werden zur Vereinfachung in guter Näherung die magnetoelastische und die elastische Energie vernachlässigt. Durch Mittelung über ein Haufwerk regellos orientierter Kristalle werden entsprechende Ergebnisse für quasiisotrope Vielkristalle hergeleitet.

J. Meixner (Berlin).

Rüdiger, O., und H. Schlechtweg: Die Magnetostriktion und die Magnetisierung des Eisens in hohen Magnetfeldern unter Berücksichtigung der wahren Magnetisierung. 3. (Versuchsanst. d. Friedr. Krupp-AG., Essen.) Ann. Physik, V. F. **41**, 151—166 (1942).

Die Beobachtungen, wonach die Magnetostriktion in hohen Feldern sich nicht, wie in der oben referierten Arbeit abgeleitet, gemäß einem $\frac{1}{H}$ -Gesetz einer Sättigung nähert, sondern linear mit dem Felde anwächst, werden auf die Volumenmagnetostriktion und damit auf die „wahre Magnetisierung“ zurückzuführen versucht. Die

Berechnung ergibt ein zu H proportionales Zusatzglied, das orientierungsunabhängig ist. Eine quantitative Prüfung der Ergebnisse ist heute noch nicht möglich, da Messungen bei hinreichend hohen Feldern noch nicht vorliegen. Die asymptotische Annäherung der Magnetisierung an die Sättigung, die in der gewöhnlichen Theorie durch ein $\frac{1}{H^2}$ -Gesetz dargestellt wird, wird bei Berücksichtigung der Volumenabhängigkeit durch ein $\frac{1}{H}$ -Glieder, das gegenüber der Beobachtung viel zu klein ist, und durch ein zu H proportionales Glied ergänzt. Beide Korrekturen sind geringfügig. *J. Meixner.*

Elektronentheorie:

Lewis, T.: The equations of motion of point electrons deduced from a variational principle. *Philos. Mag.*, VII. s. 29, 495—507 (1940).

Die Bewegungsgleichungen punktförmiger Elektronen werden aus dem Variationsprinzip

$$\delta \frac{1}{8\pi} \int (\mathfrak{E}^2 - \mathfrak{G}^2) dx dy dz dt = 0 \qquad \delta(ds) = 0$$

abgeleitet. Dabei werden nur solche Verschiebungen der Weltlinien betrachtet, die die Richtungen am Anfang und Ende des Integrationsgebietes ungeändert lassen. Die Bedingung $\delta(ds) = 0$ sorgt dafür, daß das Wirkungsintegral sich nur um endliche Beträge ändert. Als Folge dieser Bedingung tritt in den Bewegungsgleichungen für jedes Elektron eine willkürliche Konstante auf, die die Rolle der Masse spielt. Die Kraft auf das einzelne Elektron läßt sich durch retardierte und avancierte Felder der übrigen Elektronen ausdrücken und hat in dem Fall, wo die übrigen Elektronen in Ruhe sind, die übliche Form. Eine Rückwirkung einer Strahlung bei Beschleunigung des Elektrons tritt nicht auf. *F. Hund (Leipzig).*

Seeliger, R.: Zur Theorie der Elektronen-Plasmaschwingungen. *Z. Physik* 118, 618—623 (1942).

Die verschiedenen Ableitungen der Schwingungsgleichung von Elektronen in einer positiven Raumladung sind nur formal verschieden. Sie lassen sich aus der Divergenzgleichung für das elektrische Feld und der Bewegungsgleichung der Elektronen in diesem Feld sowie aus einer der beiden äquivalenten Gleichungen für die Kontinuität der elektrischen Ladung oder die Quellenfreiheit des Gesamtstroms (Konvektions- und Verschiebungsstrom) gewinnen. *Sauter (München).*

Schottky, W.: Vereinfachte und erweiterte Theorie der Randschichtgleichrichter. (*Zentralabt. d. Siemens & Halske A.-G., Berlin-Siemensstadt.*) *Z. Physik* 118, 539—592 (1942).

Das wesentlich Neue gegenüber früheren Untersuchungen des Verf. auf diesem Gebiet besteht in der Annahme, daß die Störstellen im Halbleiter vollständig dissoziiert sind, so daß man mit einer konstanten Raumladungsdichte im Randschichtgebiet des Gleichrichters rechnen kann. Dadurch werden die Differentialgleichungen für die Elektronendichte und das Feld in der Randschicht, wenn auch nicht streng, so doch in sehr einfacher Weise angenähert lösbar, und man kann daher bis zu experimentell brauchbaren Formeln vorstoßen. Wegen der Einzelheiten dieser Theorie und ihrer Anwendungen muß auf die sehr ausführliche Arbeit verwiesen werden. *Sauter.*

Castelluccio, D.: Teoria delle differenze di potenziale di contatto tra conduttori in equilibrio. 4. Studio degli equilibri di contatto tra metalli o leghe e soluzioni dei loro ioni. *Nuovo Cimento*, N. s. 18, 346—357 (1941).

Einzelausführung der in Teil III der Arbeit (vgl. dies. Zbl. 26, 180) allgemein entworfenen Rechnung über den räumlichen Aufbau des zwischen einem Metall und seiner Salzlösung auftretenden Kontaktpotentials. *Fues (Breslau).*

Nicht-relativistische Quantentheorie:

Peng, H. W.: Perturbation theory for the self-consistent field. *Proc. roy. Soc., Lond. A* 178, 499—505 (1941).

Die Fock-Diracschen Gleichungen für das self-consistent field mit Austausch

werden behandelt für den Fall, daß die Operatoren, die in die Gleichungen eingehen, in Reihen entwickelt werden können und für die Glieder nullter Ordnung die Gleichungen gelöst seien. Die Lösung der nächst höheren Ordnung läßt sich durch Auflösung algebraischer Gleichungen auf die Lösungen der vorhergehenden Ordnung zurückführen. *F. Hund* (Leipzig).

Gombás, Paul: Eine statistische Fassung der Besetzungsvorschrift der Quantenzustände für Alkaliatome und deren Anwendung zur Bestimmung der Alkaliterme. *Mat. természett. Értes.* **60**, 373—388 (1941) [Ungarisch].

In der vorliegenden Arbeit wird für Alkaliatome die Besetzungsvorschrift der Quantenzustände, welche aus dem Pauli-Prinzip folgt und nach welcher die von den Rumpfelektronen vollbesetzten Quantenzustände vom Valenzelektron nicht besetzt werden können, von statistischen Grundlagen ausgehend abgefaßt. Nach dieser Fassung der Besetzungsvorschrift üben die Rumpfelektronen, von welchen die tieferen Quantenzustände vollbesetzt werden, auf das Valenzelektron eine Abstoßungskraft aus, welche das Valenzelektron daran hindert, in die vollbesetzten, tieferen Quantenzustände hinabzufallen. Diese Kraft, welche ein Potential besitzt, hängt im allgemeinen vom Quantenzustand des Valenzelektrons ab, und zwar ist sie für das Valenzelektron in s, p, d, \dots Quantenzuständen im allgemeinen verschieden. Für das Potential dieser Kraft wird eine einfache Formel hergeleitet. — Aus diesen theoretischen Grundlagen wird eine Methode zur Bestimmung der Terme und Eigenfunktionen des Valenzelektrons der Alkaliatome entwickelt. *Autoreferat.*

Buckingham, R. A., H. S. W. Massey and S. R. Tibbs: A self-consistent field for methane and its applications. *Proc. roy. Soc., Lond. A* **178**, 119—134 (1941).

Die Hartreesche Methode zur Berechnung der Elektronenverteilung in einem Atom (self-consistent field) wird auf das Methan angewandt. Dabei wird das Potential der Kerne gemittelt über alle Tetraederlagen, so daß man ein kugelsymmetrisches Grundpotential hat, herrührend vom sechsfach geladenen C-Kern im Zentrum und von einer vierfach geladenen Kugelfläche mit dem C-H-Abstand als Radius. Mit der in üblicher Weise gefundenen Ladungsverteilung werden berechnet: Energie, diamagnetische Suszeptibilität, Polarisierbarkeit, van der Waals-Kräfte, Streuung von langsamen Elektronen. Nur beim Diamagnetismus ergab sich eine wesentliche Diskrepanz zwischen Theorie und Experiment, indem die berechnete Elektronenverteilung zu diffus erscheint. Es wird die Erwartung ausgesprochen, daß die Berücksichtigung des (hier vernachlässigten) Austausches zu einem besseren Ergebnis führt. *Sauter.*

Scheffers, H.: Zum linearen Effekt des elektrischen Feldes beim Ammoniak-Molekularstrahlversuch. *Physik. Z.* **43**, 6—10 (1942).

Zwischen dem elektrischen Moment der NH_3 -Molekel, wie es sich aus der Dielektrizitätskonstante ergibt und wie es sich aus der Ablenkung eines Molekularstrahles im elektrischen Feld (linearer Effekt) unter der Annahme einer starren Molekel ergibt, besteht ein erheblicher Unterschied. Er kann erklärt werden durch Berücksichtigung der Durchschlagschwingung des N-Atoms durch die Ebene der H-Atome. *F. Hund.*

Hoyt, Frank C., and William E. Frye: On the calculation of force fields from scattering. *Phys. Rev., II. s.* **58**, 784—786 (1940).

Unter Verwendung der beiden Abelschen Integralgleichungen

$$g(y) = \int_0^y \frac{f'(z) dz}{(y-z)^{1/2}}, \quad f(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^z \frac{g(y) dy}{(z-y)^{1/2}} + f(0),$$

von denen jede die Lösung der anderen ist, berechnen die Verff. rückwärts aus der beobachteten Streuung von Teilchen in kugelsymmetrischen statischen Kraftfeldern den Potentialverlauf. Die experimentell benötigten Eingangswerte sind die Phasenunterschiede der einzelnen Streukomponenten mit bestimmtem Drehimpuls (Entwicklung der gestreuten Wellen nach Kugelfunktionen!) gegenüber der ungestreuten Welle oder gegenüber der bekannten Phasenfunktion bei der Streuung an einem reinen

Coulombfeld. Berechnet werden diese Phasenfunktionen näherungsweise aus der Länge einer Strahlenbahn, gemessen in Wellenlängen, was dem Näherungsverfahren von Wentzel-Kramers-Brillouin entspricht. Da sich diese Phasenfunktionen auf einen Integralausdruck von der Abelschen Form transformieren lassen, kann man aus dem inversen Integral die unbekannte Potentialfunktion (graphisch) ermitteln. Auf diese Weise bestimmen die Verff. den wirksamen Potentialverlauf bei der Streuung von Elektronen an Krypton unter Verwendung der Messungen von Ramsauer und Kollath sowie für die Streuung von Deuteronen an Helium. Als Probe muß für verschiedene Drehimpulszahlen l der gleiche Potentialverlauf resultieren; dies ist im zweiten Beispiel für die l -Werte 0, 1 und 2 tatsächlich der Fall. *Sauter.*

Artmann, Kurt: Zur Theorie der anomalen Reflexion von Atomstrahlen an Kristalloberflächen. 1. Anschauliche Betrachtungen. Z. Physik 118, 624—658 (1942).

Bei den Versuchen von Frisch und Stern, bei denen die Intensität eines an einer LiF-Oberfläche reflektierten He-Strahls in Abhängigkeit vom Einfallswinkel und vom Azimut gemessen wurde, ergaben sich bei bestimmten Winkeln anormale Intensitätsdefekte („Dellen“), deren Theorie in der vier Teile umfassenden Arbeit des Verf. gegeben wird. Und zwar werden sie im Anschluß an Lennard-Jones gedeutet als Wirkung von Adsorptionsprozessen der He-Atome an der Kristalloberfläche. Zur Erleichterung der Rechnung ersetzt Verf. die Kristalloberfläche durch eine starre „Wellblechfläche“ und trägt den van der Waals-Kräften dadurch Rechnung, daß er über dieser Fläche ein nach oben eben begrenztes Gebiet tieferen Potentials annimmt, so daß ein von außen eintretender Atomstrahl nach seiner Beugung durch die Wellblechfläche unter Umständen an dieser ebenen Grenzfläche total reflektiert wird und so in der Zone der van der Waals-Kräfte weiterläuft, sofern er nicht wieder nach einem Beugungsprozeß dieses Gebiet verläßt. Verf. gewinnt so Aussagen über die Lage und Gestalt der Dellen (auch bei mangelnder Monochromasie der Primärstrahlung) sowie über die Breite der van der Waals-Zone und ihren Potentialwert. *Sauter (München).*

Artmann, Kurt: Zur Theorie der anomalen Reflexion von Atomstrahlen an Kristalloberflächen. Tl. 2: Berechnung der Dellengestalt bei diskontinuierlichem Potentialverlauf. (Inst. f. Theoret. Phys., Univ. Hamburg.) Z. Physik 118, 659—676 (1942).

Rechnet man die „Dellen“-Entstehung nicht, wie im vorstehend referierten ersten Teil der Arbeit, dynamisch durch, sondern betrachtet den stationären (End-) Zustand dieses Vorganges, so erhält man zwar wie im ersten Teil die richtige Lage der Dellen, doch stimmt die hier errechnete Dellengestalt mit der experimentell gefundenen nicht überein. Auf diese Unstimmigkeit, die mit dem speziellen Modell zusammenhängt, wird im 3. und 4. Teil der Arbeit eingegangen. *Sauter (München).*

Lindholm, Einar: Zur Theorie der Verbreiterung von Spektrallinien. Ark. Mat. Astron. Fys. 28 B, Nr 3, 1—11 (1942).

Durchführung und Verfeinerung der Weisskopfschen Theorie über die wellenmechanische Linienverbreiterung durch die Zusammenstöße mit Fremdgasatomen. Dabei wird zur Berechnung der Phasenverschiebung beim einzelnen Stoß die gewöhnliche wellenmechanische Stoßtheorie verwendet. Die Statistik der Stoßprozesse führt dann auf eine Linienform von der Gestalt der Dispersionskurve mit einer Verschiebung und Verbreiterung, die beide von den beim einzelnen Streuprozeß auftretenden Phasenkonstanten abhängen. Die Anwendung auf die Verbreiterung und Verschiebung der Natriumlinien durch Argon führt zu einer erstaunlich guten quantitativen Übereinstimmung mit den von Margenau und Watson gemessenen Werten. *Sauter.*

Fano, Ugo: A theory on cathode luminescence. Phys. Rev., II. s. 58, 544—553 (1940).

Gruber, Fr.: Ableitung der Frequenzbedingung $E_{ph} = h\nu$. Ann. Physik, V. F. 41, 167—171 (1942).

Verf. glaubt zu zeigen, daß sich die bekannte Formel für die Energie eines Photons gerade aus vier von ihm angegebenen Voraussetzungen über die Emission und Ab-

sorption eines Lichtquants durch ein Atom ableiten läßt, indem er (als 5. Voraussetzung!) relativistische Invarianz dieser Prozesse und (als 6. Voraussetzung!) den Photonenimpuls gleich E_{ph}/c annimmt. Es scheint dem Verf. entgangen zu sein, daß die beiden letzten von ihm stillschweigend benutzten Annahmen zur Ableitung der Proportionalität von E_{ph} und ν auch ohne seine vier explizit eingeführten Voraussetzungen genügen.
Sauter (München).

Kothari, D. S., and B. N. Singh: Bose-Einstein statistics and degeneracy. Proc. roy. Soc., Lond. A **178**, 135—152 (1941).

Sehr ausführliche Diskussion der durch die Bose-Einstein-Statistik dargestellten Verhältnisse bei tiefen Temperaturen in der alten Weise, daß man oberhalb der Entartungstemperatur mit der gewöhnlichen Verteilung, unterhalb der kritischen Temperatur jedoch mit völliger Entartung rechnet und dabei sämtliche überzähligen Teilchen als im Grundzustand befindlich ansieht. Trotz dieser etwas allzu schematisierten Behandlungsmethode werden u. a. Effekte infolge der Massenveränderlichkeit und im besonderen auch der Grenzfall extrem kleiner Massen (Hohlraumstrahlung) eingehend untersucht.
Sauter (München).

Somenzi, Vittorio: Interazione elettrodinamica di due elettroni e teoria di Welker della superconduttività. (Ist. di Fis., Milano.) Nuovo Cimento, N. s. **18**, 223—234 (1941).

Verf. berechnet die magnetische Wechselwirkung zwischen zwei Elektronen nach der Formel von Breit, und zwar getrennt nach gewöhnlicher und nach Austausch-Wechselwirkung, für verschiedene Arten der Elektronenbindung. Für zwei $1s$ -Elektronen von entgegengesetztem Spin im gleichen Atom werden diese beiden Wechselwirkungen entgegengesetzt gleich und kompensieren sich daher. Im Fall der nicht ganz freien Metallelektronen sind zwar beide Wechselwirkungen von gleicher Größenordnung, aber beide sehr klein. (Für ganz freie Elektronen in einem würfelförmigen Kasten ergibt sich die Austauschwechselwirkung als vernachlässigbar klein neben der gewöhnlichen Wechselwirkung.) Verf. spricht die Vermutung aus, daß die so berechneten Wechselwirkungen nicht ausreichen, um die von Welker für die Theorie der Supraleitung im Energiespektrum der Metallelektronen geforderte Lücke zu deuten, und diskutiert andere Möglichkeiten.
Sauter (München).

Wolf, Franz: Elektrostatistische Aufladung als Problem der Metallelektronik. Ann. Physik, V. F. **41**, 103—116 (1942).

Für eine elektrisch geladene metallische Vollkugel wird die Potentialverteilung berechnet, indem die Poissonsche Differentialgleichung der Elektrostatik und der von der Fermi-Statistik gelieferte Zusammenhang des elektrostatistischen Potentials mit der Ladungsdichte der Metallelektronen zugrunde gelegt werden. Letzterer ersetzt und verfeinert die Annahme der Elektrostatik, wonach im Innern von Leitern die elektrische Feldstärke verschwindet (hergeleitet aus dem Ohmschen Gesetz $J = \sigma \mathcal{E}$). Durch eine Näherungsrechnung, ähnlich der beim Thomas-Fermischen Atommodell, wird der Verlauf des Potentials und der Ladungsverteilung ermittelt. Es ergibt sich eine Ladungsdichte, die von der Oberfläche her so rasch abnimmt, daß z. B. bei Kupfer in den ersten drei Å unter der Oberfläche 99,6% der gesamten elektrostatistischen Aufladung untergebracht sind. Die Ergebnisse sind ohne weiteres auf anders geformte massive Körper übertragbar. Eine besondere Untersuchung wird für sehr dünne Leiter durchgeführt.
J. Meixner.

Dehlinger, U., und E. Wertz: Biologische Grundfragen in physikalischer Betrachtung. Naturwiss. **30**, 250—253 (1942).

Relativistische Quantentheorie:

Petiau, Gérard: Sur les matrices de spin. C. R. Acad. Sci., Paris **213**, 863—866 (1941).

Reduktion der Spinmatrizen $S_i = \frac{1}{n} \sum_{p=1}^n \sigma_i^{(p)}$, wobei $\sigma_i (i=1, 2, 3)$ die Pauli-

matrizen sind und der obere Index diejenige Spinvariable charakterisiert, auf die der Operator wirkt. Die Ergebnisse sind bekannt. *S. Țițeica (Jași).*

Haskey, H. W.: Einstein's distant parallelism and Dirac's equation. *Philos. Mag.*, VII. s. 30, 478—486 (1940).

The object of this paper is to show that Einstein's geometry of distant parallelism forms the natural link between the Tétrôde and Dirac matrices. It is also shown that Dirac's equation for a Galilean five-world is of the same form as Flint's in a Riemannian five-world over any given small region. *J. Haantjes (Amsterdam).*

Tonnelat, Marie-Antoinette: Une nouvelle forme de théorie unitaire. Étude de la particule de spin 2. *Ann. Phys.*, Paris 17, 158—208 (1942).

Die Arbeit ist eine Zusammenfassung der Noten in den C. R. Acad. Sci. Paris 212 (1941) (s. dies. Zbl. 25, 139). *M. Fierz (Basel).*

Bhabha, H. J., and H. C. Corben: General classical theory of spinning particles in a Maxwell field. *Proc. roy. Soc., Lond. A* 178, 273—314 (1941).

Betrachtet wird eine punktförmige Partikel, deren elektromagnetische Eigenschaften durch eine Ladung und eine Dipolkonstante (die die Beziehung zwischen einer Drehung und einem elektrischen und magnetischen Moment angibt) beschrieben werden. Es lassen sich Bewegungsgleichungen aufstellen, die mit der Erhaltung von Energie, Impuls und Drehimpuls vereinbar sind. Die Feldenergie muß, um Unendlichkeiten zu vermeiden, etwas anders als gewöhnlich definiert werden. Als mechanische Eigenschaften der Partikel können die Masse und einige mit Drehimpulsen und Trägheitsmomenten zusammenhängende Konstante willkürlich angenommen werden. Da die Eigenschaften der betrachteten Partikel allgemeiner sind, als es der Erfahrung mit Elementarteilchen entspricht, werden Einschränkungen untersucht, die zu einem (im Ruhesystem) rein magnetischen Dipol führen. Die Formeln für die Strahlung werden für einen solchen viel einfacher; die Streuung des Lichtes hängt bei hohen Frequenzen nicht mehr von Masse, Ladung und Dipol ab; sie nimmt mit dem umgekehrten Quadrat der Frequenz ab. *F. Hund (Leipzig).*

Bhabha, H. J.: General classical theory of spinning particles in a meson field. *Proc. roy. Soc., Lond. A* 178, 314—350 (1941).

Mit gleichen Methoden wie beim Maxwell-Feld (s. vorhergeh. Referat) wird eine Partikel in einem Mesonfeld betrachtet. Ladung und Dipol geben die Verknüpfung der Partikel mit dem reellen (also neutralen) Mesonfeld an. Die Bewegungsgleichungen enthalten noch die charakteristische Konstante (reziproke Länge) des Mesonfeldes. Gibt man den anderen Konstanten die Werte, die der Kerntheorie entsprechen, so kann man unterscheiden zwischen Prozessen, die praktisch so ablaufen wie im Maxwell-Feld, und solchen, die starke Abweichungen zeigen. Die Streuung von Mesonen, soweit sie mit dem Spin eines Protons oder Neutrons zusammenhängt, wird ausgerechnet; auch hier ergibt sich eine Abnahme mit dem umgekehrten Quadrat der Frequenz; hierbei ist der Einfluß der Strahlung ganz wesentlich (der in der Quantentheorie der Streuung nicht berücksichtigt werden kann — vgl. dies. Zbl. 25, 132). *F. Hund.*

Lubański, J. K., et L. Rosenfeld: Sur la représentation des champs mésiques dans l'espace à cinq dimensions. *Physica*, Haag 9, 117—134 (1942).

Für eine Übersicht über die möglichen Formen einer fünfdimensionalen Mesontheorie im Sinne von Møller (dies. Zbl. 25, 140) wird von der Form $\beta_i \partial_i \psi + \kappa \psi = 0$ mit Vertauschungsregeln der β_i (dies. Zbl. 23, 190) ausgegangen. Für die β_i ergeben sich irreduzible Darstellungen vom Grade 1, 6, 15, 10, 10. Die Darstellung vom Grad 6 ist die vektorielle Mesontheorie der vierdimensionalen Fassung, die vom Grad 15 gerade die von Møller behandelte Kombination aus vektorieller und pseudoskalarer Theorie, die beiden vom Grad 10 ergeben eine pseudovekterielle Theorie. *F. Hund.*

Jauch, J. M.: Über die Wechselwirkung schwerer Teilchen mit Elektronen. (*Physik. Inst., Eidgen. Techn. Hochschule, Zürich.*) *Helv. phys. Acta* 14, 465—485 (1941).

Es wird die Wechselwirkung von Elektronen mit schweren Teilchen untersucht,

die durch einen Zusatz in der Lagrangefunktion der Form $\eta \Psi_i^+ \psi_k^+ O_{iklm}^s \Psi_l \psi_m$ beschrieben werden kann. Dabei bedeuten Ψ_i, ψ_k die Eigenfunktionen der schweren Teilchen und der Elektronen. i, k, l, m sind Spinindizes. O^s ist ein relativistisch invarianter Operator, der auch Differentiationen nach den Elektronenkoordinaten enthalten kann. ψ^+ und ψ sind am Orte der schweren Teilchen zu nehmen. η ist eine Konstante. Im Grenzfall, in dem nur ein schweres, ruhendes Teilchen neben den Elektronen vorhanden ist, vereinfacht sich der Wechselwirkungsansatz zu $\eta \psi^* P_s \psi \cdot \delta(x)$, wo $\delta(x)$ die Diracsche δ -Funktion bedeutet und P_s die Operatoren $P_1 = -\beta, P_2 = -1, P_3 = -\beta(\vec{\Sigma}, \vec{\sigma}), P_4 = -(\vec{\Sigma}, \vec{\sigma}), P_7 = -(\vec{\Sigma}, [\vec{\alpha} \times \vec{p}])$ darstellt. Es sind $\vec{\alpha}, \beta, \vec{\sigma}$ die Diracschen und die Spinmatrizes der Elektronen, \vec{p} deren Impulsoperator $\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x}$; und $\vec{\Sigma}$ sind die Spinmatrizes des schweren Teilchens. (Der Operator P_5 verschwindet. Die beiden Operatoren P_6, P_8 enthalten Differentiationen nach der Zeit und sind daher aus prinzipiellen Gründen nicht in Betracht zu ziehen (siehe hierzu M. Fierz, dies. Zbl. 26, 190.) — Die so definierten Wechselwirkungsterme spielen die Rolle einer potentiellen Energie der Elektronen. Die entsprechenden Gleichungen können daher streng gelöst werden, falls man die δ -Funktion durch eine reguläre Ortsfunktion $\Delta(\vec{x})$ ersetzt (z. B. durch ein „Topfpotential“). Die Lösungen werden im Grenzfall $\Delta \rightarrow \delta$ untersucht. Es zeigt sich, daß dieser Grenzfall nur für P_1 und P_7 existiert. Die Lösungen werden im Limes zu ebenen Wellen; die entsprechende Streuung von Elektronen an schweren Teilchen verschwindet also. Man erkennt aus diesem Ergebnis, daß die Störungsrechnung (Bornsche Näherung) für das vorliegende Problem unzulässig ist. Der Verf. schließt weiter, daß die Ansätze P_1 und P_7 für eine Elektronenpaartheorie der Kernkräfte bevorzugt werden sollten. *M. Fierz (Basel).*

Novacu, Valer: Über die Wechselwirkung von Photonen und Elektronen. Bull. Sci. École polytechn. Timișoara 10, 331—344 (1941) [Rumänisch].

Im Rahmen der de Broglieschen Theorie des Lichts wird ein allgemeiner Ausdruck für die Wechselwirkungsenergie von Photonen und Elektronen angegeben. Die unbestimmten Konstanten, die in diesem Ausdruck auftreten, werden auf Grund des Korrespondenzprinzips spezialisiert. Wendet man den speziellen Ausdruck auf die Berechnung des Wirkungsquerschnittes für die Compton-Streuung an, so bekommt man eine Formel, die sich auf die Klein-Nishinasche [Z. Physik 52, 853 (1929)] reduziert, wenn die Ruhmasse des Photons gleich Null gesetzt wird. *S. Țițeica (Jasi).*

Bruno, B.: The Compton effect for the meson. Ark. Mat. Astron. Fys. 28 B, Nr 5, 1—7 (1942).

Die Comptonstreuung an einem Meson mit Spin 1 wird berechnet. Die Intensität des Streulichtes im Abstand R und unter dem Streuwinkel θ ergibt sich zu

$$\frac{J}{J_0} = \frac{1}{R^2} \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \left(\frac{k}{k_0} \right)^3 \left\{ \frac{1}{2} (1 + \cos^2 \theta) + \frac{1}{96 m^2 c^2} [k k_0 (28 - 64 \cos \theta + 12 \cos^2 \theta) + (k^2 + k_0^2) (29 - 16 \cos \theta + \cos^2 \theta)] \right\}.$$

k_0 ist die Wellenzahl des einfallenden Lichtes, k diejenige des Streulichtes:

$$k = \frac{k_0}{1 + \frac{k_0}{mc} (1 - \cos \theta)}.$$

M. Fierz (Basel).

Christy, R. F., and S. Kusaka: The interaction of γ -rays with mesotrons. Phys. Rev., II. s. 59, 405—414 (1941).

Mit Hilfe der Quantenelektrodynamik wird die Bremsstrahlung von vektoriellen Mesonen und deren Erzeugung durch Strahlung im Coulombfelde eines Kernes berechnet. Dabei muß die endliche Ausdehnung des Atomkernes berücksichtigt werden.

M. Fierz (Basel).

Rarita \ddagger , William, and Julian Schwinger: On the neutron-proton interaction. Phys. Rev., II. s. 59, 436—452 (1941).

Die wellenmechanischen Eigenschaften eines aus einem Proton und einem Neutron bestehenden Systems werden unter Berücksichtigung der Spinabhängigkeit der Kräfte untersucht. Für den Wechselwirkungsoperator wird folgender Ausdruck gewählt: $V = -\{1 - \frac{1}{2}g + \frac{1}{2}g(\sigma_1 \cdot \sigma_2) + \gamma S\}J(|r|)$, wobei r der Lagevektor des einen Teilchens in bezug auf das andere, $|r|$ dessen Länge, $J(|r|)$ eine „Kastenpotential“-funktion, σ_1 und σ_2 die Spins und $S = \frac{3(\sigma_1 r)(\sigma_2 r)}{|r|^2} - (\sigma_1 \sigma_2)$ bedeuten. Die Konstanten g und γ und die Breite und Tiefe ($|r_0|$ bzw. V_0) des Potentialtopfes werden aus den empirisch bekannten Werten der Bindungsenergie ($E_0 = 2,17$ MeV) und des Quadrupolmoments ($Q = +2,73 \times 10^{-27}$ cm²) des Deuterons und aus der Streuung von Protonen und langsamen Neutronen in Wasserstoff bestimmt. Es ergibt sich $|r_0| = 2,80 \times 10^{-13}$ cm, $V_0/E_0 = 6,40$, $\gamma = 0,775$, $g = 0,0715$. — Der Wechselwirkungsansatz wird auf die Behandlung folgender Probleme angewandt: magnetisches Moment des Deuterons, Streuung und Einfangung unter Strahlungsaussendung von Neutronen in Wasserstoff und Zertrümmerung des Deuterons durch Kernphotoeffekt. Die Ergebnisse stimmen mit der einzigen Ausnahme der Photozertrümmerung, gut mit dem experimentellen Befund überein. Bei diesem letzten Problem scheint eine genauere Kenntnis des die Wechselwirkung übertragenden Feldes notwendig zu sein. *S. Tifeica (Jaši).*

Peters, B., and C. Richman: Deuteron disintegration by electrons. Phys. Rev., II. s. 59, 804—807 (1941).

Auf Grund der Bethe-Peierlsschen Theorie des Deuterons [Proc. Roy. Soc. London A 148, 146 (1935)] werden der „elektrische“ (Übergang vom Grund- zum ³P-Zustand) und der „magnetische“ (Übergang vom Grund- zum ¹S-Zustand) Wirkungsquerschnitt für die Zertrümmerung von Deuteronen durch Elektronenstoß berechnet. Beobachtbare Werte ($\sim 10^{-32}$ cm) ergeben sich schon dann, wenn die Elektronenenergie um 50 keV die Bindungsenergie des Deuterons übertrifft. In diesem Energiebereiche überwiegt der magnetische Effekt; da aber der elektrische Querschnitt mit der dritten Potenz und der magnetische nur quadratisch mit der Energie wächst, werden beide Querschnitte gleich bei einer Energie von 600 keV oberhalb der Schwelle.

S. Tifeica (Jaši).

Landé, Alfred: On the magnitude of electronic charges. Phys. Rev., II. s. 59, 434—435 (1941).

Bemerkungen über einen Erklärungsversuch der dimensionslosen Konstanten $e^2/c\hbar$ (dies. Zbl. 24, 144).

F. Hund (Leipzig).

Hulthén, Lamek: Über die Eigenlösungen der Schrödinger-Gleichung des Deuterons. Ark. Mat. Astron. Fys. 28 A, Nr 5, 1—12 (1942).

Die Schrödinger-Gleichung für ein System aus zwei Teilchen mit einer gegenseitigen potentiellen Energie vom Typus e^{-kr}/r wird analytisch behandelt, indem eine sehr ähnliche Gleichung streng gelöst wird (diese Lösung auch bei Hylleraas und Risberg, dies. Zbl. 26, 43) und daran ein Störungsverfahren angeschlossen wird.

F. Hund (Leipzig).

Weinberg, J. W.: Scattering in the pair theory of nuclear forces. Phys. Rev., II. s. 59, 776—780 (1941).

Mit der Wechselwirkung von Mesonen und schweren Kernteilchen, die der Paartheorie der Kernkräfte (Wigner, Critchfield und Teller, dies. Zbl. 22, 188) ohne Spinabhängigkeit zugrunde gelegt wurde, wird die Streuung von Mesonen an schweren Kernteilchen ausgerechnet. Mit Konstanten, die zu erfahrungsgemäßen Kerneigenschaften führen, und der Mesonmasse, die aus der kosmischen Strahlung bekannt ist, ergibt sich für langsame Geschwindigkeiten ein Wirkungsquerschnitt, der im Vergleich zu dem beobachteten zu hoch ist. Der hohe Wirkungsquerschnitt steht mit bestimmten Zügen der Paartheorie in Zusammenhang.

F. Hund (Leipzig).